



AUGUST 24-25, 2020

OTHA ONLINE WORKSHOP 2020

on operator theory and harmonic analysis
and their applications

POSTER SESSION

Southern Federal University
Rostov-on-Don

On solutions of a linear singular differential equation in the space of generalized functions K' .

ABDOURAHMAN(University of Maroua, Cameroon)
abdoulshehou@yahoo.fr

The main purpose of this work is to describe the solutions of the nonhomogeneous first order linear differential equation of the following type

$$ax^p y'(x) + bx^q y(x) = \sum_{i=0}^s \delta^{(i)}(x)$$

with a, b two real numbers and $s, p \in \mathbb{N}$, $q \in Z_+$, in the space of generalized functions K' . For this purpose we use the superposition principle of solution and this important formula. If, $k, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$x^k \delta^{(s)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < k \\ \frac{(-1)^k s!}{(s-k)!} \delta^{(s-k)}(x), & \text{si } s \geq k. \end{cases}$$

All the solutions are described in various cases with dependance of the parameters of the equation.

Key words and phrases: test functions, generalized functions, dirac delta function

Theorem let $a, b \in \mathbb{R}$ such that $ab \neq 0, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $q > p - 1$.
The general solution of the equation is defined by:

$$\begin{aligned} y(x) = & k_1 e^{-\frac{b}{a(q-p+1)} x^{q-p+1}} \theta(x) + k_2 e^{-\frac{b}{a(q-p+1)} x^{q-p+1}} \theta(-x) \\ & + \sum_{j=0}^{p-2} c_j \delta^{(j)}(x) + \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^p i!}{a(i+p)!} \delta^{(i+p-1)}(x) + \\ & + \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^p k!}{a(k+p)!} \sum_{l=1}^{[q-p+1]} \left(\frac{b}{a}\right)^l (-1)^{l(q-p+1)} \times \\ & \times \prod_{m=1}^l \frac{[k+q+m(q-p+1)]!}{[k+p-m(q-p+1)]!} \delta^{(k+p-1-l(q-p+1))}(x), \end{aligned}$$

where $k_1, k_2, a, b, c_0, \dots, c_{p-2}$ arbitrary constants.

**Bone contour simplification algorithm for the visual analysis
of X-ray medical images**

**A. M. S. Al-Temimi (Baghdad, Iraq), V. S. Pilidi
(Rostov-on-Don, Russia)**

amar.comsec.it@gmail.com, pilidi@sfedu.ru

Areas of applications of X-ray diagnostic methods are constantly expanding. One of the relatively new approaches in diagnosis is the so called method of reference lines and angles. An algorithm for finding such characteristics was developed in the papers [1–3]. The first step of this algorithm consists in finding the contours of the objects under investigation. These contours are represented as a sequence of their points. The algorithm for reducing the number of contour points proposed in this report allows to reduce the amount of computation and, most importantly, simplify the correction of the resulting contours in those cases when, for some reason, the resulting contours deviate from the original image, which can lead to incorrect values of the desired geometric characteristics. The parameters used by the proposed algorithm are found as a result of the analysis of numerous images and depend on the analyzed area.

The results of testing the application using the proposed algorithm confirmed its high efficiency.

R e f e r e n c e s

1. *Al-Temimi A. M. S., Pilidi V. S.* Automating the process of determining the reference lines on the X-ray medical images Engineering Journal of Don. 2017, No. 1.
2. *Al-Temimi A. M. S., Pilidi V. S.* On an algorithm for analyzing the structure of radiographic medical images. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. North-Caucasian region. Series: Technical sciences. 2018. No. 1(197), pp. 23–28.
3. *Al-Temimi A. M. S., Pilidi V. S.* Improvements of programming methods for finding reference lines on X-Ray images. Computer Optics. 2019. Vol. 43, No. 3, pp. 397–401.

Cycles and invariant surfaces in gene network models
N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, L. S. Minushkina
 (Novosibirsk, Russia)
 vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

We study piecewise linear dynamical systems of the types

$$\dot{x}_1 = L(x_4) - x_1; \quad \dot{x}_m = \Gamma_m(x_{m-1}) - x_m; \quad (1)$$

$$\dot{x}_1 = L_1(y_3) - x_1; \quad \dot{y}_k = \Gamma_k(x_k) - y_k; \quad \dot{x}_j = L_j(y_{j-1}) - x_j, \quad (2)$$

and some of their higher-dimensional analogues. Here, $m = 2, 3, 4$; $j = 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; step functions Γ_k and Γ_m are monotonically increasing; L and L_j denote monotonically decreasing step functions. The point of the phase portrait of a system where all right-hand sides have discontinuities is called *singular point*. Systems similar to (1) and (2) appear in gene networks modeling, see [1] and [2], respectively.

For 6-dimensional dynamical system (2), we have described in [3] conditions of existence of a cycle and have constructed its invariant neighborhood. For systems of the type (1), similar conditions and neighborhoods were described in [1].

Following [3], for the system (1), and for the system (2) in the symmetric case $L_1 = L_2 = L_3$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, in the compliments of these invariant neighborhoods we construct invariant 2-dimensional piecewise linear surfaces $P_{(1)}^2$ and $P_{(2)}^2$, respectively. Actually, these surfaces are contained in boundaries of these neighborhoods.

Theorem 1. *Trajectories of points of surfaces $P_{(1)}^2$, $P_{(2)}^2$ converge to the singular points of the systems (1) and (2), respectively.*

For some higher-dimensional analogues of the systems (1) and (2), examples of non-uniqueness of cycles were described earlier, see [4]. Each of these cycles is contained in corresponding invariant surface.

R e f e r e n c e s

1. *Glass L., Pasternack J. S.* Stable oscillations in mathematical models of biological control systems. Journal of Math. Biology. 1978. Vol. 6. pp. 207–223.
2. *Elowitz M. B., Leibler S.* A Synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. Nature. 2000. Vol. 403. pp. 335–338.
3. *Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S.* Monotonicity of Poincaré mapping in some models of circular gene networks. Journ. of Applied and Industrial Mathematics. 2019. Vol. 13, No. 3, pp. 472–479.
4. *Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.* On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical systems. In: Springer Proc. in Mathematics & Statistics, 2014. Springer, NY, Vol. 72, pp. 225–233.

F. N. Dekhkonov (Tashkent, Uzbekistan)
f.n.dehqonov@mail.ru
THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR
PARABOLIC EQUATION

We consider the following mathematical model of the heat conduction process along the domain $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x, y < l\}$:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 < x, y < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \varphi(y)\mu(t), & u|_{x=l} &= \psi(y)\mu(t), \\ u|_{y=0} &= 0, & u|_{y=l} &= 0, & 0 < y < l, & t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

and initial condition

$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x, y \leq l. \quad (3)$$

Assume that the functions $\varphi(y)$ and $\psi(y)$ are smooth and satisfies conditions

$$\varphi(y) \geq \psi(y) \geq 0 \quad \text{and} \quad \varphi'(y) \leq \psi'(y) \leq 0, \quad 0 \leq y \leq l.$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is differentiable on the half-line $t \geq 0$ and satisfies the following constraints

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \leq M, \quad t > 0. \quad (4)$$

Problem. For a given constant $\alpha, \beta \geq 1$ and $\theta > 0$ problem consists in looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x, y, t)$ of the initial-boundary value problem (1)-(3) with some admissible control $\mu(t)$ exists and for all $t \geq T$ satisfies the equality

$$\int_0^{l/\alpha} \int_0^{l/\beta} u(x, y, t) dx dy = \theta, \quad t \geq T. \quad (5)$$

R e f e r e n c e s

1. Alimov Sh. A. On a control problem associated with the heat transfer process. Eurasian Mathematical Journal. 2010. No. 1, pp. 17-30.
2. Lions J. L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.

Problems on extremal decomposition of the complex plane

Iryna Denega (Kyiv, Ukraine)

iradenega@gmail.com

Let \mathbb{N} , \mathbb{R} be the sets of natural and real numbers, respectively, \mathbb{C} be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be its one point compactification, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Let $r(B, a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to a point $a \in B$.

Theorem 1. [2] *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Then, for any fixed system of different points $\{a_k\}_{k=1}^n$ of the unit circle and for any collection of mutually non-overlapping domains B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, the following inequality holds*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Theorem 2. [3,4] *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Then, for any fixed system of different points $\{a_k\}_{k=1}^n$ of the unit circle and for any collection of mutually non-overlapping domains B_0 , B_∞ , B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, the following inequality holds*

$$\begin{aligned} & [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \\ & \leq \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{if } \gamma \in (0, \frac{n+2}{2}); \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{if } \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

R e f e r e n c e s

1. Dubinin V. N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel. 2014.
2. Bakhtin A. K., Denega I. V. Weakened problem on extremal decomposition of the complex plane. Matematichni Studii. 2019. Vol. 51, No. 1, pp. 35–40.
3. Bakhtin A. K., Denega I. V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II. Ukrains'kii Matematichnyi Visnyk. 2019. Vol. 16, No. 4, pp. 477–945.
4. Bakhtin A. K., Denega I. V. Estimates of maximum of the products of inner radii of non-overlapping domains. Ukr. Mat. Zh. 2020. Vol. 72, No. 2, pp. 173–183.

**Atomic decompositions, two stars theorems, and distances for
the Bourgain-Brezis-Mironescu space and other big spaces**

L. D'Onofrio (Napoli, Italy)

donofrio@uniparthenope.it

I will present a joint work with Luigi Greco, Karl-Mikael Perfekt, Carlo Sbordone and Roberta Schiattarella Given a Banach space E with a supremum-type norm induced by a collection of operators, we prove that E is a dual space and provide an atomic decomposition of its predual. We apply this result, and some results obtained previously by one of the authors, to the function space \mathcal{B} introduced recently by Bourgain, Brezis, and Mironescu. This yields an atomic decomposition of the predual \mathcal{B}_* , the biduality result that $\mathcal{B}_0^* = \mathcal{B}_*$ and $\mathcal{B}_*^* = \mathcal{B}$, and a formula for the distance from an element $f \in \mathcal{B}$ to \mathcal{B}_0 .

Image Segmentation using clustering methods

Badr Khalil Mahmoud El-Eissawi(Rostov-on-Don,Russia)

eleissavi@sfedu.ru

Victor A. Nesterenko(Rostov-on-Don,Russia)

neva09@mail.ru

Image segmentation plays a significant role in image processing, object detection, machine learning, pattern recognition, computer vision ..etc. The result of this process is extracting meaningful objects inside the image. However, there is no unique method or approach for image segmentation. Clustering is one of the powerful techniques that has been used for many years in image segmentation[1]. The clustering methods can be divided into unsupervised and supervised or hard clustering and soft clustering or parametric and nonparametric based on the algorithm process, used criteria and the user involved in the process to define the criteria. [2] Over the past years a huge variety of new algorithms have been proposed to achieve the best image segmentation with respect of the speed and accuracy.

We used Viola-Jones methods which is called the Haar-like features[3] to obtain the pixels features and criteria in the image ,we applied this function as an iteration process in a hierarchical level in the image. We obtained the characteristics of the pixels in different levels, then, we applied the fuzzy clustering method to find a group of connected pixels with similar characteristics then we segment the objects in the tested images based on their groups of characteristics. At the end we achieved great results and we detected objects and the region of interest in tested images perfectly.

R e f e r e n c e s

1. *Sharma P and Suji J.* A Review on Image Segmentation with its Clustering Techniques. Int. J. Signal Process. Image Process. Pattern Recognit. 2016. Vol. 9, No. 5, pp. 209–218.
2. *Tayal M. A and Raghuvanshi M. M.* Review on Various Clustering Methods for the Image Data. J. Emerg. Trends Comput. Inf. Sci. 2010. Vol. 2, No. 5, pp. 34–38.
3. *Jalled F and Voronkov I.* Object Detection using Image Processing. ArXiv. 2016. Vol. abs/1611.07791. pp. 1–6.

On a model of cleaning the near-wellbore region

O. V. Galtsev (Belgorod, Russia)

galtsev_o@bsu.edu.ru

In the present study, we consider the problem of acidizing a non-periodic elastic solid frame of soil with double porosity, where a small dimensionless parameter is taken as a value equal to the ratio of the characteristic pore size and the characteristic size of the physical region under consideration. In contrast to the existing problems [1], cracks are considered. We restrict ourselves to the case of a weakly viscous liquid [2] in an elastic soil frame (Biot's model).

The pores are modeled by a system of cylindrical channels, the axes of which are parallel to the coordinate axes at a distance from each other. Cracks are modeled by balls spaced apart from each other. The problem of describing the motion of a viscous fluid in an elastic periodic skeleton with double porosity was previously considered in the work [3].

In dimensionless variables, the motion of a viscous incompressible fluid in pores is described by the Stokes equation. Displacements of an elastic solid soil frame – by the Lame equation. Acid propagation is the diffusion-convection equation for the concentrations of acid and products of chemical reactions. Due to the dissolution of the solid skeleton, the pore space has an unknown (free) boundary. We will assume that the dimensionless parameters characterizing the viscosity of the liquid and the elastic properties of the solid soil frame depend on a small parameter (the ratio of the characteristic pore size to the characteristic size of the physical region under consideration). And the dimensionless diffusion coefficients are fixed and independent of it. The problem of determining the concentration function of the reagent is solved independently of the problem of determining the concentration functions of the products of chemical reactions.

Note that for the physical process the Reynolds number has a small value; therefore, inertial terms are absent in the Stokes and Lame equations.

R e f e r e n c e s

1. Meirmanov A. M., Galtsev O. V., Galtseva O. A. Several free boundary problems arising in rock mechanics. Contemporary mathematics. 2018. Vol. 64, No. 1, pp. 98–130.
2. Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flow. Paris, Atlantis Press. 2014.
3. Meirmanov A. Double porosity models for liquid filtration in incompressible poroelastic media, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2010. Vol. 20, No. 4, pp. 635–659.

On the commutant of the generalized backward shift operator

in weighted spaces of entire functions

O. A. Ivanova (Rostov on Don, Russia)

neo_ivolga@mail.ru

Let Q be a convex domain in \mathbb{C} , containing the origin; $H(Q)$ be the Fréchet space of all holomorphic functions on Q ; E be a countable inductive limit of weighted Banach spaces which with the help of Laplace transform is topologically isomorphic to the strong dual of $H(Q)$. A function $g_0 \in E$ satisfying the condition $g_0(0) = 1$ defines the generalized backward shift operator $D_{0,g_0}(f)(t) = \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, which is continuous and linear in E . If $g_0 \equiv 1$, then D_{0,g_0} is the usual backward shift operator D_0 . In the general case D_{0,g_0} is a one-dimensional perturbation of D_0 . It is assumed that g_0 has a finite number of zeros or has no zeros. We investigate continuous linear operators in E , which commute with D_{0,g_0} in E . Such operators have been described in [1]. Necessary and sufficient conditions are proved that an operator of the mentioned commutant is a topological isomorphism of E . The problem of the factorization of nonzero operators of this commutant is investigated. In the case when the function g_0 , defining the generalized backward shift operator, has zeros in Q , they are divided into two classes: the first one consists of isomorphisms and surjective operators with a finite-dimensional kernel, and the second one contains finite-dimensional operators. In the proofs we use essentially a characterization of proper closed D_{0,g_0} -invariant subspaces of E obtained in the article [2]. With the help of obtained results we study the generalized Duhamel product in $H(Q)$. If $g_0 \equiv 1$, then it is the Duhamel product, which in $H(Q)$ has been introduced and studied by N. Wigley [3]. The above results are proved in [4].

R e f e r e n c e s

1. Ivanova O. A., Melikhov S. N. On operators which commute with the Pommiez type operator in weighted spaces of entire functions. St. Petersburg Math. J. 2017. Vol. 28, No. 2, pp. 209–224.
2. Ivanova O. A., Melikhov S. N. On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type. J. of Math. Sci. 2019. Vol. 241, No. 6, pp. 760–769.
3. Wigley N. The Duhamel product of analytic functions. Duke Math. J. 1974. Vol. 41, pp. 211–217.
4. Ivanova O. A., Melikhov S. N. On the commutant of the generalized backward shift operator in weighted spaces of entire functions.
<https://arxiv.org/pdf/1909.13703.pdf>

Dyadic analogue of the Paul Erdos problem (Moscow, Russia)

M. A. Karapetyants
karapetyantsmk@gmail.com

We are exploring the dyadic analogue of one of the Paul Erdos problem, namely, the existence of a probability density of a random variable (which is a power series), extended to a dyadic half-line. We consider the power series with coefficients being either zeroes or ones at the fixed point x of the $(0, 1)$ interval. The question is whether there is a density from \mathbb{L}_1 ? In classic case it is still an opened problem for x greater than one half (P. Erdos proved the non-existence of the density for lambdas equal to $\frac{1}{p}$, where p is the Pisot number). Moreover, we study the so called "dual problem". The same random variable, but the point x is fixed now ($x = \frac{1}{2}$) and the coefficients are integer and belong to $[0; N]$ segment for some natural N . Here we answer the same question and provide criteria of the existence of a density in terms of the solution of the refinement equation as well as in terms of the coefficients of a random variable.

R e f e r e n c e s

- P. Erdos, *On the smoothness properties of Bernoulli convolutions*, Am. J. Math., 62, 180-186.
- P. Erdos, *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Am. J. Math., 61, 974-975.
- V. Protasov, *Refinement equations with nonnegative coefficients*, The Journal of Fourier Analysis and Applications 6, 55–78 (2000).
- Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A., *Series and Walsh transform. Theory and applications*, Science, 1987.
- Protasov V. Yu., Farkov Yu. A., *Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line*, Sbornik: Mathematics. 2006. Vol. 197, No. 10, pp. 129-160.

**Sound coding algorithm development for a cochlear
implantation system (Moscow, Russia)**

M. I. Karapetyants (maryyant@mail.ru)

E. M. Gluhovsky

A. I. Egorov

We study the general structure of the well-known cochlear stimulation sound coding algorithms, which allow patients with sensorineural hearing loss to perceive sound are described. The existing methods of sound-processing are briefly covered and the process of computing the electrode stimulation frequency is given. The authors present a new way of stimulation for the cochlear implantation systems, optimizing the computational costs for the sound-processing, and demonstrate its main advantages. General steps of the sound coding algorithm are described and the algorithm performance estimates are provided, namely, the comparison of the initial sound and the sound perceived by the patient was done. The algorithms itself was encoded using matlab. The cochlear implantation system technology of treating the hearing impaired people requires the usage of special sound-processing methods called stimulation strategies, which focus on the stimulation of cochlea receptors. There are several of them including CIS, ACE, HiRes, SPEAK and so on, but only some general details of the principle of their work are known. Authors addressed the problem of developing a new algorithm to be used in medical devices. ACE and CIS algorithms provided the inspiration for the new method but the main parts are different. The filtration part is the same as in the SIC method. Other methods that were also used are Goertzel's recursive algorithm (in order to save resources), non-linear compression and a low-pass filter.

R e f e r e n c e s

O. Babacan, *Implementation of a Neurophysiology-Based Coding Strategy for the Cochlear Implant*,, Zurich open Repos. Arch. 2010.

A. Buechner, *Comparison of a paired or sequential stimulation paradigm with advanced bionicseTM high-resolution mode*, Otol. Neurotol. 2005. P. 26. b,-5. P. 941-947.

Choi C. T. M. et. al., *A Vocoder for a Novel Cochlear Implant Stimulating Strategy Based on Virtual Channel Technology*, IFMBE Proceedings. , 2009. P. 310-313.

M. Choi C. T., Lee Y.-H., *A Review of Stimulating Strategies for Cochlear Implants*, Cochlear Implant Res. Updat. 2012. P. 2. b,- 2005.

Zeng F. G. et. al., *Development and evaluation of the Nurotron 26-electrode cochlear implant system*, Hear. Res. 2015. P. 322. P. 188–199.

Integrations and torsions
D. B. Katz (Kazan, Russia)
katzdavid89@gmail.com

The curvilinear integrals over the boundaries of domains are classical research tools for studying the well known boundary value problems of complex analysis. This is why the classical results on that problems concern domains with rectifiable boundaries only. Generalized integrations over non-rectifiable arcs depends on certain geometry properties of the arcs in neighborhoods of their ends, so it is important to study the connections of generalized integration and so called torsions of the path of integration at its end points.

Presently there are published numerous papers on this subject, see, for instance, [1]–[3]. We formulated the definition of integration over non-rectifiable paths using constructions of these works and based on the concept of an integrator. We will show that the offered construction of integrator is closely connected with so called torsion of arc Γ . Almost all published until now results on this subject concern arcs of moderate torsion. Then we will describe a new construction of generalized integration over non-rectifiable paths, which enables us to integrate over arcs of high torsion. Then we apply this construction for the study of the Riemann boundary value problem.

The torsion of arc Γ at point a_j , $j = 1, 2$ is a value

$$\tau_j := \inf \left\{ p > 0 : \iint |K_\Gamma(z)|^{1/p} dx dy < \infty \right\},$$

where integral is taken over a neighborhood of a_j . If $\tau_j < 1$, then the arc has moderate torsion at point a_j , otherwise its torsion is high.

We obtain some results on integration in connection with this definition.

R e f e r e n c e s

1. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B. A.* The Cauchy Type Integral and Singular Integral Operator over closed Jordan curves. *Monatshefte fur Mathematik*. 2015. Vol. 176, No. 1, pp. 1–15.
2. *Guseynov E.* Integrable Boundaries and Fractals for Holder Classes; The Gauss-Green Theorem. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 2016. Vol. 55, No. 4, pp. 1–27.
3. *Harrison J., Norton A.* Geometric integration on fractal curves in the plane. *Indiana Univ. Math. J.* 1991. Vol. 40, No. 2, pp. 567–594.

Generalized Newton-Kantorovich method and its variance

A Khellaf (Guelma, Algeria)

**Ecole Nationale Polytechnique de Constantine (ENP de
Constantine)**

amarlasix@gmail.com

Solving a nonlinear equation in a functional space requires two processes: discretization and linearization. Linearization first the nonlinear problem and the discretization of the linear problem will be called option (B). Discretize first the nonlinear problem and linearize the discrete nonlinear problem to be called option (C). In this abstract, we propose a new numerical plan equivalent to option (B): we first linearize the original nonlinear problem with an alternative linearization scheme than that used in option (B), then we discretize the resulting iterative linear equations using a projection method to implement the corresponding finite dimensional problem.

The objectives of this new plan are to weaken the theoretical assumptions and to give a powerful numerical performances. We will give sufficient conditions to manage the convergence results. We will solve a system of Fredholm equations of the second type.

R e f e r e n c e s

1. *Khellaf A. and all* New numerical process solving nonlinear infinite-dimensional equations. Computational and Applied Mathematics. 2020. Vol. 39, No. 93, pp. 1–15.
2. *Grammont L and all* For nonlinear infinite dimensional equations which to begin with: linearization or discretization. J Integral Equ Appl. 2014. vol. 26, pp. 413–436.

**On solution sets of irregular nonlinear equations and the
quasi-solution method**

M. Yu. Kokurin (Yoshkar-Ola, Russia)
kokurinm@yandex.ru

We consider operator equations $F(x) = f$, $x \in D$, where $F : H_1 \rightarrow H_2$ is a nonlinear operator, $D \subset H_1$ is a bounded closed subset with $0 \in D$, and H_1, H_2 are Hilbert spaces. Suppose that $F(x) = Ax + G(x)$, where $A \in L(H_1, H_2)$. Assume that $G(0) = 0$, $\|G(x) - G(y)\| \leq L(\|x\| + \|y\|)\|x - y\|$, $x, y \in D$. We investigate the structure of the solution set $F^{-1}(f) \cap D$ and the approximation properties of the quasi-solution method with respect to this set. When investigating variational methods for solving irregular equations, meaningful results are usually obtained by introducing additional requirements on D and F . Namely, D is generally assumed to be compact, and F to be injective on D . In this case, the original problem is conditionally well-posed. If there is an estimation of the continuity modulus of the inverse operator F^{-1} on $F(D)$, it is possible to obtain estimates for the accuracy of the quasi-solution method. At present, theorems on the injectivity and conditional stability are established for a wide spectrum of inverse problems related to various classes PDEs. However, there are still a number of unresolved issues in this field. In addition, available results often include a priori requirements for the desired functions and other parameters of the inverse problems under study. We reject the requirements of compactness and injectivity on D and F , respectively. Therefore we are interested in the location of the set of possible solutions to the considered inverse problem in the case of incomplete input data set. When investigating the convergence of regularization methods for solving irregular operator equations, a key role is played by the source conditions on the desired solution of the form $x^* = (F'^*(x^*)F'^*(x^*))^p v$, $v \in H_1$, $p \geq 1/2$. Since the operator on the right-hand side depends on the desired solution, conditions of this type are in most cases difficult to detect from a practical point of view. We obtain results on local uniqueness of the solution, or on the clustering of solutions, which means that possible solutions are close in the case of their non-uniqueness. This is achieved by a special selection of the set D that defines the class of source representable solutions. In contrast to the previous studies, the source representation condition we use includes the operator A , which does not depend on the desired solution. This simplifies the interpretation of the source condition.

The work was partially supported by RSF (project N20-11-20085).

Trace for formulas and spectral shift functions for dissipative operators

M. M Malamud (Moscow, Russia)
malamud3m@gmail.com

We will discuss trace formulae for functions of contractions, dissipative operators, unitary operators and self-adjoint operators. The existence of Krein-type complex valued absolutely continuous spectral shift function will also be discussed. The existence of real valued spectral shift function as well as a connection with its A -integrability property will be discussed too.

We will also concern with applications to boundary value problems for elliptic operators in domains with compact boundary.

The talk is based on joint works with H. Neidhardt and V. Peller [1]-[3].

R e f e r e n c e s

1. *Malamud M., Neidhardt H.* Trace formulas for additive and non-additive perturbations. Advances in Math. 2015. Vol. 274, pp. 736–832.
2. *Malamud M.M., Neidhardt H., Peller V. V.* Analytic Operator Lipschitz Functions in the Disk and a Trace Formula for Functions of Contractions. Func. Analysis and Its Applications. 2017. Vol. 51, No. 3, pp. 185–203.
3. *Malamud M.M., Neidhardt H., Peller V. V.* Absolute continuity of spectral shift. Journal of Functional Analysis. 2019. Vol. 276, pp. 1575–1621.

Resolvent for an operator related to the inviscid fluid dynamics

A. B. Morgulis (Rostov-na-Donu-Vladikavkaz, Russia)
morgulisandrey@gmail.com

Let $n = 2, 3$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – smooth domain and $S = \partial D$. Vector field \mathbf{V} is said to be *harmonic in D* iff $\operatorname{curl} \mathbf{V} = 0$ and $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ in D . Note that $\mathbf{V} \not\parallel S$ unless \mathbf{V} belongs to a vector space which dimension is finite and equal to 1-dimensional Betty number of D .

Every harmonic field satisfies stationary Euler equation of inviscid incompressible fluid and, therefore, represents the velocity field for some steady fluid flow confined within domain D . The small perturbations of such flows are solutions to equations

$$\mathbf{u}_t + (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \times \mathbf{V} = -\nabla h; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } D. \quad (1)$$

System (1) is of mixed type with only one family of characteristics driven by field \mathbf{V} . We'll be talking about a non-characteristic mixed problem for Eq.(1). Assume there is a partition $S = S^+ \cup S^-$, $S^+ \cap S^- = \emptyset$, $\mp \inf\{V_n(x), x \in S^\pm\} > 0$, where $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, and \mathbf{n} stands for the unit of outward normal on S . Such partitions are quite natural for the boundaries of ring-like domains such as the planar rings or strips, or the gaps between the cylinders, spheres, tori, etc. Thus, the characteristics enter the domain through S^+ . That is why we have to impose an additional boundary condition there. We set boundary conditions as follows

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{S^+} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0|_S. \quad (2)$$

Such the choice of bc matches well-known Kazhikov's setting of the initial-boundary value problem for the Euler equations with throughflow.

Our communication sheds some light on the spectral properties of problem (1-2) which have been investigated not so deeply as the similar problems in the characteristic case when $V_n = 0$ on S . The results turn out to be rather peculiar and quite different from the characteristic case. For instance, let $\tilde{\mathcal{L}}_2(S^+)$ stand for the space of square-summable functions on S^+ vanishing on average; let \mathcal{B}^+ denote the space of bounded linear operators in $\tilde{\mathcal{L}}_2(S^+)$.

Theorem 1. *Let D be a ring-like domain, and let \mathbf{V} be a harmonic field with no fixed points in \bar{D} . There exists entire function $K_+ : \lambda \mapsto K_+(\lambda) \in \mathcal{B}^+$, such that the set of poles of the resolvent of problem (1-2) coincides with $\{\lambda : \ker K_+(\lambda) \neq \{0\}\}$. Moreover, one can write down K_+ explicitly modulo the recovering of a divergence-free field from its curl.*

**Massless black holes on the singularities of the conifold type
and their connection with harmonic differential forms**

T. V. Obikhod (Kyiv, Ukraine)
obikhod@kinr.kiev.ua

With harmonic differential form

$$F = *F ,$$

$$dF = 0$$

is associated conserved charge

$$Q = \int_{\Sigma_5} F ,$$

which characterizes a 3+1-dimensional object — a black hole, closed in Σ_5 -space [1]. On the other hand, this object is curved D3-branes lying on a singularity of the type of conifold [2]. Since the conifold is the point at which the minimum surface disappears, the mass of the brane or black hole vanishes [3],

$$M \sim |Z^1|,$$

where $Z^1 = 0$ at the conifold point.

As the conifold point corresponds to a singular conformal field theory (CFT) since a soliton, i.e., D-brane, becomes massless it seems natural to define the Teichmuller space, T as the universal cover of the moduli space with these singular CFT points deleted. The set of stable B-branes of CFT is well defined at any point in the Teichmuller space, T .

R e f e r e n c e s

1. *Strominger A.* Massless Black Holes and Conifolds in String Theory. Nucl. Phys. 1995. Vol. B451, pp. 96–108, hep-th/9504090.
2. *Aspinwall Paul S.* D-Branes on Calabi–Yau Manifolds. hep-th/0403166.
3. *Greene B. R., Morrison D. R., and Strominger A.* Black Hole Condensation and the Unification of String Vacua. Nucl. Phys. 1995, Vol. B451, pp. 109–120, hep-th/9504145.

Exponential stability of integro-differential equations

with convolution memory terms

N. A. Rautian (Moscow, Russia)

nrautian@mail.ru

We discuss an abstract evolution equation with memory arising in linear viscoelasticity (see [1]), presenting the results based on the classical approaches stated in the monographs [2], [3]. These results can be easily extended and adapted to many other differential models containing memory terms in convolution form.

We reduce the initial-boundary value problem for this equation to the Cauchy problem for differential equation of the first order in separable Hilbert space. We prove the existence of a contraction semigroup and establish exponential stability within standard assumptions on the memory kernels. On the base of these results, we prove the theorem about the strong solvability of the appropriate initial boundary-value problem. Moreover, we consider some examples for exponential and fractional-exponential kernels (Rabotnov functions) (see [4]).

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (project 20-01-00288 A).

R e f e r e n c e s

1. *Vlasov V. V., Rautian N.A.* Spectral analysis of linear models of viscoelasticity. Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230, No. 5, pp. 668–672.
2. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer-Verlag, New York. 2000.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications. Springer New-York - Dordrecht - Heidelberg - London. 2012.
4. *Vlasov V. V., Rautian N A.* Well-posed solvability and the representation of solutions of integro-differential equations arising in viscoelasticity. Differential Equations. 2019. Vol. 55, No. 4, pp. 561–574.

**Reliability investigation of Electrical Submersible Pumps
using Mean Residual Life Analysis. Expectations and Reality**

V. N. Rusev, A. V. Skorikov, E. Magafurov

Gubkin University, Moscow, Russia

vnrusev@yandex.ru, skorikov.a@gubkin.ru

Среднее остаточное время жизни - mean residual life (MRL) (Средняя остаточная наработка)

$$\mu(t) = M(T - t | T > t)$$

относится к одной из старейших тем статистического анализа - биометрическим функциям. Начало исследований по этой теме - работа Эдмунда (Эдмонда) Галлея [1], в которой даны таблицы дожития (life tables) и введено понятие средней продолжительности предстоящей жизни.

В работе используются исследования средней остаточной наработки для двупараметрического распределения Гнеденко - Вейбулла [2,3]. В частности аналитические представления через неполные гамма-функции $\gamma(a, x)$, $\Gamma(a, x)$ и гипергеометрическую функцию Куммера ${}_1F_1(a; b; x)$.

Вычисления, проведенные с помощью пакета Wolfram Mathematica для представлений через $\gamma(a, x)$, ${}_1F_1(a; b; x)$, дают осцилляцию значений $\mu(t)$, для представления через $\Gamma(a, x)$ осцилляция значений не происходит.

Полученные формулы средней остаточной наработки для модели Гнеденко - Вейбулла и эмпирической средней остаточной наработки позволяют прогнозировать остаточное время работы погружного оборудования на стадии эксплуатации и могут быть использованы при оценке ресурсных характеристик оборудования с целью оптимизации функционирования изучаемых объектов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Halley, E.* An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau. Phil. Trans. Royal Society of London 1693. Vol. 17, № 7, p. 596– 610.

2. *Nassar, M.M., Eissa, F.H.* On the Exponentiated Weibull Distribution. Communications in Statistics - Theory and Methods. 2003. Vol. 32, № 7, p. 1317 – 1336.

3. *Деньгаев, А.Б., Руслев, В.Н., Скориков, А.В.* Исследование средней остаточной наработки в модели Гнеденко – Вейбулла распределения отказов. Оценки остаточного времени ресурса погружного насосного оборудования . 2020. № 1/298, p.25 –37 .

On nonlocal elliptic operators associated with the metaplectic group

P. A. Sipaylo, K. N. Zhuikov (Moscow, Russia)
sipaylo@gmail.com, zhuykovcon@gmail.com

We consider operators of the form

$$\mathcal{D} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k \Phi^k : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \quad (1)$$

where D_k are pseudodifferential operators on \mathbb{R}^N from the Shubin class [3] of order $\leq d$, Φ is a metaplectic operator (cf. [1]), $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ is the Sobolev space [2]. Such operators are called G -operators [2], where the group $G \simeq \mathbb{Z}$ is generated by operator Φ .

By *trajectory symbol* of operator (1) we denote a family of finite-difference operators $\sigma_{\text{tr}}(\mathcal{D})$ with parameter $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$. This family acts in spaces $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x, \xi, s}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x, \xi, s-d})$ as follows:

$$[\sigma_{\text{tr}}(\mathcal{D})(x, \xi)]v(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma(D_k)(S^n(x, \xi))v(n-k). \quad (2)$$

Here $\sigma(D_k)$ is the principal symbol of operator D_k , $S^n(x, \xi)$ is the result of n -fold multiplication of a symplectic matrix S , which corresponds to operator Φ , by a vector $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2N}$, $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu_{x, \xi, s})$ is the Hilbert space of sequences square summable with weight $\mu_{x, \xi, s}(n) = |S^n(x, \xi)|^{2s}$.

In terms of trajectory symbol (2) we give ellipticity conditions of operator (1). Finiteness theorem has been proved. As an example we give ellipticity conditions of a two-term operator $D_0 + D_1 \Phi$ corresponding to a symplectic matrix S . With the obtained results Fredholmness of a control problem for the Shrödinger equation has been studied.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

R e f e r e n c e s

1. *de Gosson M.* Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics. Birkhäuser, Basel. 2011.
2. *Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators. Birkhäuser, Basel. 2008.
3. *Shubin M. A.* Pseudodifferential Operators and Spectral Theory. Springer-Verlag Berlin. 2001.

**Mixed Boundary Value Problems for Strongly Elliptic
Differential-Difference Equations and Applications**

A. L. Skubachevskii (Moscow, Russia)

skub@lector.ru

We consider mixed boundary value problem for second order strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder with the Dirichlet boundary conditions on the bases of cylinder and the Neumann boundary conditions on cylindrical part of boundary.

We establish existence and uniqueness of generalized solution to the above problem and smoothness of generalized solutions in some subdomains. We prove that a regular difference operator is an isomorphism mapping subspace of the Sobolev space with homogeneous Dirichlet boundary conditions on the bases of cylinder onto subspace of the Sobolev space with nonlocal boundary conditions. This property of difference operators allows to show that the mixed nonlocal boundary value problem for second order elliptic differential equation has a unique generalized solution.

It was also proved that a second order strongly elliptic differential-difference operator with mixed boundary conditions is regular accretive and satisfies the Kato conjecture. Some of results were obtained jointly with V. V. Liiko.

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no.075–03–2020–223/3 (FSSF-2020-0018).

**A note on Legendre Hermite Chebyshev Laguerre Gegenbauer
wavelets with an application on sbvps arising in astrophysics**

D. Tiwari (Vienna, Austria)

diksha.tiwari@univie.ac.at

Getting solution near singular point of any non-linear BVP is always tough because solution blows up near singularity. In this article our goal is to construct a general method based on orthogonal polynomial and then use different orthogonal polynomials as particular wavelets. To show importance and accuracy of our method we have solved non-linear singular BVPs with help of constructed methods and compare with exact solution. Our result shows that these method converge very fast. Converge of constructed method is also done in this paper. We can notice algorithm based on these methods is very fast and easy to handle.

In this work we discuss multiresolution analysis for wavelets generated by orthogonal polynomials, e.g., Legendre, Chebyshev, Lagurre, Gegenbauer. Then we use these wavelets for solving nonlinear SBVPs. Wavelets are able to deal with singularity easily and efficiently.

Spatial Riesz potential type operator with difference characteristic and density from weighted Hölder spaces¹

B. G. Vakulov^a, Yu. E. Drobotov^b, G. S. Kostetskaya
(Rostov-on-Don, Russia)

^abvak1961@bk.ru, ^byu.e.drobotov@yandex.ru

The Riesz potential type operator with the bounded and sufficiently smooth difference characteristic $a(x, t)$ is considered in the following way:

$$(K_a^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a(x-t)f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < n.$$

Under specific conditions [1], the inverse operator $(K_a^\alpha)^{-1}$ can be formulated as

$$(K_a^\alpha)^{-1}f = D_\Omega^\alpha f + \mu_\alpha * f,$$

where $\mu_\alpha(x)$ is integrable and D_Ω^α is the hypersingular integral with the characteristics $\Omega(x, t)$:

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} \Omega(t) dt, \quad 0 < \alpha < l,$$

$(\Delta_t^l f)(x)$ is a finite difference of the function f with the center at the point x of the order l with the step t , $d_{n,l}(\alpha)$ is the normalizing constant such that $D_\Omega^\alpha = (-\Delta)^{\alpha/2}$.

The latter provides therefore the solution of the integral equation

$$(E - K_a^\alpha) f = g, \quad E f = f,$$

in the terms of D_Ω^α , and the presented research considers its smoothness in the terms of weighted Hölder spaces.

R e f e r e n c e s

1. Vakulov, B. G., Kostetskaya, G. S., Drobotov, Y. E. Riesz Potential in Generalized Hölder Spaces. In Nekrasova, I., Karnaukhova, O., Christiansen, B. (Ed.), Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises (pp. 249-273). IGI Global.

¹The work of the second co-author on the reported study was funded by RFBR and TUBITAK according to the research project 20-51-46003.

О компактности интегральных операторов

с периодическими ядрами

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону, Россия)

ogavsyankin@sfedu.ru

Рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ядро $k(x, y)$ которого является измеримой ω -периодической функцией, т. е. существует такой вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ с положительными координатами, что

$$k(x + \omega_j e_j, y + \omega_j e_j) = k(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис пространства \mathbb{R}^n .

Получены условия на ядро $k(x, y)$, при которых оператор K ограничен из пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Обозначим через M_a оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, и рассмотрим оператор $M_a K$.

Следуя [1], будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$, если существует такая постоянная a_∞ , что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{|x| > N} |a(x) - a_\infty| = 0.$$

Если $a_\infty = 0$, то будем говорить, что $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$.

Получены условия на ядро $k(x, y)$, при выполнении которых оператор $M_a K$, где $a \in B_0^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором, действующим из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$. Более того, показано, что если $a \in B^{\sup}(\mathbb{R}^n)$ и оператор $M_a K$ является компактным, то $a_\infty = 0$.

Аналогичные результаты справедливы для оператора $K M_a$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00094.

Л и т е р а т у р а

1. Karapetians N. K., Samko S. G. Equations with Involutive Operators. Birkhauser. Boston, Basel, Berlin, 2001.

**Дополнительные значения эллиптических функций Якоби
и их применение**

**Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин (Нижний Новгород,
Россия)**
brat_ras@list.ru

В классических руководствах по теории эллиптических функций часто приводятся значения эллиптических функций Якоби с модулем k при значении их аргумента, равном $\mathbf{K}(k)/2$, где $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода (см., например, [1, стр. 280]). Однако иногда может возникать потребность в знании явных зависимостей от k значений этих функций и в других точках их параллелограммов периодов.

В данной работе для величины $\xi_n = sn^2(\mathbf{K}(k) \cdot 2^{-n}, k)$ на основе формулы двойного аргумента для эллиптического косинуса Якоби [1] выведено рекуррентное соотношение:

$$\xi_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2} \xi_n^2}{k^2 (1 + \sqrt{1 - \xi_n^2})},$$

с помощью которого, стартуя со значения $\xi_0 = 1$, можно последовательно определить значения всех эллиптических функций Якоби при $\mathbf{K}(k) \cdot 2^{-n}$. Далее, применяя известные теоремы сложения для эллиптических функций Якоби [1], можно определить их значения в точках вида $\mathbf{K}(k) \cdot (2^{-n} + 2^{-m})$ ($n, m \in \mathbb{N}$) и т.д.

Кроме этого, полученные в этой работе значения использованы для получения новых тождеств для полного эллиптического интеграла 1-го рода согласно методу, предложенному в статье [2].

Очевидно, что в рамках описанного выше подхода можно получить значения эллиптических функций Якоби и в точках вида $i\mathbf{K}(k') \cdot 2^{-n}$, где $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль, $n \in \mathbb{N}$ и т.п.

Работа А.Э. Рассадина поддержанна грантом РФФИ № 18-08-01356-а.

Л и т е р а т у р а

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Наука. 1970.
2. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Задача Дирихле для прямоугольника и новые тождества для эллиптических интегралов и функций. Журнал СВМО. Том. 22, №. 2, стр. 145–154.

**Прогнозирование эффективной стратегии торгов на
валютной бирже методами машинного обучения**

Е. В. Алымова (Ростов-на-Дону, Россия)

langnbsp@gmail.com

Целью исследования является разработка методики обоснованного выбора стратегии ведения торгов на валютной бирже в следующем десятиминутном периоде, основываясь на данных текущего двадцатиминутного периода торгов.

Данная работа является продолжением исследования [1], в котором получена модель классификации поведения финансового временного ряда на основе показателей логарифмической доходности валютной пары BTC/USD, реализованная в форме нейронной сети.

В работе сделано предположение, что показатели логарифмической доходности в текущем двадцатиминутном периоде определяют показатели логарифмической доходности в следующем десятиминутном периоде. Для проверки этого предположения по каждым двадцати значениям логарифмической доходности определяется направление линейного тренда поведения котировок целевой валютной пары в следующие десять минут.

Предложена методика выбора стратегии ведения торгов на валютной бирже в следующем десятиминутном периоде, основываясь на данных текущего двадцатиминутного периода торгов. Выделено три стратегии: покупка в начале следующего периода с целью продажи по первой более высокой цене (стратегия 1), продажа в начале следующего периода с целью покупки по первой более низкой цене (стратегия -1) и бездействие (стратегия 0), если угловой коэффициент линейной регрессии на начало следующего десятиминутного периода является незначительным по выбранному критерию.

Для предсказания значения углового коэффициента построена нейронная сеть прямого распространения, параметры которой подобраны эмпирически с целью повышения точности прогнозирования. При использовании прогнозных значений углового коэффициента линейной регрессии на каждые 3 результативные стратегии приходится одна нерезультативная.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00910).

Л и т е р а т у р а

1. Алымова Е. В., Кудрявцев О. Е., Применение нейронной сети для предсказания поведения финансовых временных рядов // Теория вероятностей и ее применения, 2020, Т. 65, № 1 : С. 122-123

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Ю. В. Афанасенкова (Калуга, Россия)

dvoryanchikova_y@mail.ru

Обобщенные степени (далее ОС) $X^{(n)}(x, x_0)$ с нуль точкой x_0 и ряды, построенные с помощью этих конструкций, были введены Л.Берсом [1]. Последовательности этих функций $X^{(n)}(x, x_0)$ обладают относительно заданных дифференциальных операторов свойствами дифференцирования, аналогичным формально обычным правилам дифференцирования. Среди рядов по ОС особо были выделены ряды аналогичные элементарным функциям, например экспоненциальной

$$\exp \alpha X(x, x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} X^{(i)}(x, x_0). \quad (1)$$

Были изучены основные свойства этих функций при действительном параметре p и показано, что при различном выборе исходных дифференциальных операторов (1) приводит к определенным классам специальных функций.

В настоящем сообщении рассмотрен случай комплексного $\alpha = p + iq$. Показано, что известная формула Эйлера

$$\exp(p + iq) = \exp px(\cos qx + i \sin qx)$$

для ОС не справедливо. Найдена формула замещающая ее.

Изучены основные свойства этого тождества. Указано на ее применение при решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Приведены частные примеры.

Л и т е р а т у р а

1. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 56, №1, 1944, 67-93.

**Восстановление быстро осциллирующей правой части в
многомерном гиперболическом уравнении**

П. В. Бабич (Ростов-на-Дону, Россия)

xblahblahc@gmail.com

Доклад посвящен вопросу о восстановлении неизвестной быстро осциллирующей по времени правой части двумерного линейного волнового уравнения, рассматриваемого в пространственно-временной области, представляющей прямой круговой цилиндр. Случай произвольной области исследовался в работе [1]. Здесь же разработанный там метод применен нами с учетом специфики указанной области.

В цилиндре $Q_T = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \times (0, T) \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения с большим параметром ω вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(x)(r_0(t) + r_1(t, \omega t)), (x, t) \in Q_T,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x_1^2 + x_2^2 = 1} = 0$$

где $r_0(t)$ плавная, а $r_1(t, \tau)$ осциллирующая с нулевым средним функция. Введем в рассмотрение функции $\varphi_j(t), j = \overline{0, 2}, \chi(t, \tau)$ и $\psi(x)$, а также точку $(x^0, t_0) \in Q_T$, удовлетворяющие определенным условиям. Обратная задача состоит в нахождении неизвестных функций $f(x)$ и $r_1(t, \tau)$ определенных классов, таких что для решения волнового уравнения $u_\omega(x, t)$ выполнены следующие асимптотические равенства:

$$\left\| u_\omega(x^0, t) - \left[\varphi_0(t) + \frac{1}{\omega} \varphi_1(t) + \frac{1}{\omega^2} (\varphi_2(t) + \chi(t, \omega t)) \right] \right\|_{C([0, T])} = o(\omega^{-2}),$$

$$\|u_\omega(x, t_0) - \psi(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = o(1), \omega \rightarrow \infty.$$

При указанных выше условиях доказана теорема о существовании и единственности решения обратной задачи.

Л и т е р а т у р а

1. Babich P. V., Levenshtam V. B. Inverse problems in the multidimensional hyperbolic equation with rapidly oscillating absolute term. arXiv:2003.07625

БИФУРКАЦИЯ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В БЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев (Ростов–на–Дону, Россия)

batishev-v@mail.ru

Исследуется задача о ветвлении термокапиллярного течения жидкости в слое бесконечной толщины со свободной недеформируемой границей, на которой задано неравномерное распределение температуры. Найдены условия, при которых возникает бифуркация незакрученного течения, приводящая к появлению вращения жидкости в тонком слое вблизи границы. Вращательные режимы представляют собой двухпараметрическое семейство, параметры которого не определяются внешними условиями.

Течение жидкости описывается системой Навье–Стокса и уравнением переноса тепла. Вблизи свободной поверхности возникает пространственный пограничный слой, который рассчитывается на основе известных уравнений Прандтля и учитывает внешний поток жидкости на границе. Рассчитаны два типа режимов – не закрученные (основные) и вращательные (вторичные). Найдены условия, при которых существуют основные режимы. Рассчитаны параметры, при которых основные режимы теряют устойчивость относительно малых колебаний по окружной координате.

Показано, что вращательные режимы возникают в пограничном слое при бифуркации не закрученных режимов только при локальном охлаждении свободной поверхности. Эти режимы зависят от радиальной, осевой и окружной цилиндрических координат. При нагреве границы вращение не появляется. В окрестности точки бифуркации построена асимптотика вращательных режимов. Показано, что вращательные режимы представляют собой семейство решений, зависящее от двух произвольных параметров, заполняющих внутренность круга единичного радиуса. Осесимметричные режимы этого семейства полностью определяются постановкой задачи. Несимметричные режимы содержат параметры, которые не зависят от условий задачи. Построено точное решение нелинейной задачи, которое описывает вращательные режимы течений жидкости.

CR-геометрия: новые результаты и новые проблемы
В. К. Белошапка (МГУ, Москва, Россия)
vkb@strogino.ru

На заре CR -геометрии А.Пуанкаре, применяя свою технику работы с формальными степенными рядами, исследовал свойства ростка вещественной гиперповерхности двумерного комплексного пространства, инвариантные относительно голоморфных преобразований. При этом выяснилось, что ключом к пониманию ситуации является росток 3-мерной сферы, который обладает рядом экстремальных свойств. Например, его 8-мерная локальная группа голоморфных автоморфизмов $SU(2, 1)$ имеет максимальную размерность среди всех 3-мерных гиперповерхностей (единственное исключение - гиперплоскость). За прошедшие 100 лет аналитический подход Пуанкаре превратился в один из самых эффективных методов в CR -геометрии, применимых для изучения многообразий произвольных размерностей и коразмерностей. Поэтому не удивительно, что вопросы о строении самих модельных поверхностей находятся в центре внимания.

Недавно (2018) в работах Коссовского, Сабзевари, Спиро и Грегоровича была доказана g_+ -гипотеза. Т.е. было доказано, что стабилизатор начала координат вполне невырожденной модельной поверхности старшего веса больше, чем два не содержит нелинейных преобразований. Эта теорема имеет интересные применения, в частности, для решения проблемы эквивалентности CR -многообразий.

После доказательства этой гипотезы возрос интерес к распространению метода модельной поверхности на классы CR -многообразий, выходящие за рамки вполне невырожденных многообразий. Таким естественным расширением класса вполне невырожденных многообразий являются порождающие CR -многообразия конечного типа по Блуму-Грэмму. За последние два года автору удалось метод модельной поверхности реализовать в этом новом, весьма широком, контексте. В частности, был получен критерий голоморфной однородности модельной поверхности (постоянство Блум-Грэм-типа). Этот новый виток теории модельных поверхностей ставит ряд естественных вопросов для будущих исследований.

Л и т е р а т у р а

V. K. Beloshapka, CR -многообразия конечного Блум-Грэм-типа: метод модельной поверхности, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, No. 2, 2020.

**О точках совпадения двух отображений, действующих из
частично упорядоченного пространства в произвольное
множество**

С. Бенараб (Тамбов, Россия)
benarab.sarraa@gmail.com

Точной совпадения пары отображений называют элемент, на котором эти отображения принимают одинаковые значения. Точки совпадения отображений частично упорядоченных пространств исследованы А.В. Арутюновым, Е.С. Жуковским, С.Е. Жуковским (см. Topology and its Applications, 2015, V. 179, № 1, р. 13–33); в частности, доказано, что упорядоченно накрывающее отображение и монотонное отображение, действующие из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство, имеют точку совпадения. Мы рассматриваем задачу о точке совпадения пары отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано какое-либо бинарное отношение, соответственно, невозможно определить свойства накрывания и монотонности отображений. Для исследования такой задачи мы определяем понятие точки «квазисовпадения» — элемента, для которого существует его не превосходящий элемент такой, что значение на нем первого отображения равно значению второго отображения на исходном элементе. Оказывается, что для существования точки совпадения достаточно потребовать выполнения следующего условия: любая цепь точек «квазисовпадения» ограничена и имеет нижнюю границу, которая также является точкой «квазисовпадения». Также в работе предложена трактовка понятия устойчивости в частично упорядоченном пространстве точки совпадения отображений к их малым изменениям, и получены условия такой устойчивости.

Л и т е р а т у р а

1. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. Topology and its Applications. 2015. Том. 179, №. 1, стр. 13–33.
<https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.08.013>
2. Бенараб С., Жуковский Е. С. О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением. Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2018. Том. 23, №. 122, стр. 210–215.
<https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215>

Характеризация спектральных данных оператора

Штурма-Лиувилля на графе-звездце

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов; Россия)

bondarenkonp@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений Штурма-Лиувилля на графе-звездце:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^m (y'_j(\pi) - hy_j(\pi)) = 0, \quad (3)$$

где m — число ребер графа, $\{y_j\}_{j=1}^m$ — неизвестные функции, λ — спектральный параметр, $\{q_j\}_{j=1}^m$ — вещественные функции из $L_2(0, \pi)$, называемые потенциалами, $h \in \mathbb{R}$.

При каждом $k = \overline{1, m}$ определим вектор-функцию $\Phi_k(x, \lambda) = [\phi_{kj}(x, \lambda)]_{j=1}^m$, удовлетворяющую уравнениям (1) при $x_j = x, j = \overline{1, m}$, условиям склейки (3) и следующим граничным условиям:

$$\phi_{kk}(0, \lambda) = 1, \quad \phi_{kj}(0, \lambda) = 0, \quad k, j = \overline{1, m}, \quad k \neq j.$$

Пусть $\Phi(x, \lambda) := [\phi_{kj}(x, \lambda)]_{k,j=1}^m$ — матрица-функция, составленная из столбцов $\Phi_k(x, \lambda)$. Матрица Вейля определяется следующим образом: $M(\lambda) := \Phi'(0, \lambda)$. Ее полюсы совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1, k = \overline{1, m}}$ задачи (1)-(3). Введем весовые матрицы

$$\alpha_{nk} := -\text{Res}_{\lambda=\lambda_{nk}} M(\lambda).$$

В работе получена характеристика спектральных данных $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}_{n \geq 1, k = \overline{1, m}}$ задачи (1)-(3). Для исследования обратной задачи, состоящей в восстановлении потенциалов $\{q_j\}$ и коэффициента h по спектральным данным $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}_{n \geq 1, k = \overline{1, m}}$, применяется метод спектральных отображений (см. [1]).

Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19-71-00009).

Л и т е р а т у р а

1. Bondarenko N. P. Constructive solution of the inverse spectral problem for the matrix Sturm-Liouville operator. Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Published online.

DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1729760>.

Самосопряженность и дискретность спектра блочных якобиевых матриц

B. С. Будыка (Москва, Россия)
budyka.vik@gmail.com

Рассмотрим блочные якобиевы матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathcal{B}_0^* & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathcal{B}_1^* & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_p & \dots & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots & \mathcal{B}_{n-1}^* & \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n & \mathbb{O}_p & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^*$, $\mathcal{B}_n \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $\det \mathcal{B}_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{O}_p — нулевая матрица, и $\mathbb{C}^{p \times p}$ — множество всех $p \times p$ -матриц с элементами из \mathbb{C} . С матрицей \mathbf{J} ассоциируют минимальный якобиев оператор в $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$. Оператор \mathbf{J} симметричен, но не обязательно самосопряжен.

Теорема 1. Пусть \mathbf{J} — минимальный оператор ассоциированный в $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^p)$ с блочной якобиевой матрицей вида (1) и спектр диагонального оператора \mathcal{A} дискретен. Пусть также для некоторого $N \in \mathbb{N}_0$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(i) \sup_{n \geq N} \|\mathcal{A}_n^{-1} \cdot \mathcal{B}_n\| < \frac{1}{2}, \quad \sup_{n \geq N} \|\mathcal{A}_n^{-1} \cdot \mathcal{B}_{n-1}^*\| < \frac{1}{2};$$

$$(ii) \sup_{n \geq N} (\|\mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{B}_{n-1}^*\|^2) < \frac{1}{2};$$

(iii) оператор \mathcal{A} — положительно определен и

$$\sup_{n \geq N} (\|\mathcal{A}_n^{-1/2} \mathcal{B}_n \mathcal{A}_{n+1}^{-1/2}\| + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1/2} \mathcal{B}_{n+1}^* \mathcal{A}_{n+1}^{-1/2}\|) < 1.$$

Тогда оператор $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ имеет дискретный спектр.

Эта работа основана на статье [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Л и т е р а т у р а

1. Будыка B. C., Маламуд M. M. Самосопряженность и дискретность спектра блочных якобиевых матриц. Матем. заметки. 2020. Том. 108:3, стр. 457–462.

**Распространение волн в неоднородном цилиндрическом
волноводе с кольцевой трещиной**

А. О. Ватулян, В. О. Юров

(Ростов-на-Дону, Россия)

vatulyan@math.rsu.ru, vitja.jurov@yandex.ru

Асимптотически и численно исследованы волны в неоднородном цилиндрическом волноводе с дефектом в виде кольцевой трещины. Колебания волновода вызваны периодической во времени распределенной по части внешней границы нагрузкой. Трещина моделируется математическим разрезом, чьи берега не взаимодействуют. Поле перемещений построено как сумма эталонного и добавочного полей перемещений. Эталонное поле строится для неоднородного в радиальном направлении полого цилиндрического волновода без дефекта. При построении поля использовано преобразование Фурье, для решения задачи в трансформантах применен метод пристрелки, а при обращении выполнено интегрирование на основе квадратурных формул высокого порядка точности.

Для построения добавочного поля перемещений рассмотрены вспомогательные задачи, удовлетворяющие условиям отсутствия нагрузок; на отслоении вводятся неизвестные скачки перемещений. Составлена система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно скачков продольных и радиальных перемещений, причем ядра интегральных уравнений не имеют явного представления. В рамках асимптотического подхода добавочное поле перемещений получено путем решения системы интегральных уравнений, соответствующих трещине, размер которой стремится к нулю. Расходящиеся интегралы понимаются в обобщенном смысле. Для построения добавочного поля перемещений для трещины произвольного размера применен метод граничных элементов. Задача сведена к решению СЛАУ. Для вычисления коэффициентов проводится разбиение на расходящуюся часть, которая вычисляется аналитически, и сходящуюся, которая находится на основе квадратурных формул. Проведено сравнение двух подходов, оценена область изменения размера трещины, в которой результаты практически совпадают.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90017.

Соотношение типа Гаусса № 15 для функции Горна H_3

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М. (Казань, Россия)

ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

В теории обобщенного волнового уравнения и осисеммитрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэнтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_m}{(\delta)_m} \frac{z^m}{m!} \frac{t^n}{n!},$$

для которой в [1] приведены два Гауссовых соотношения:

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) - H_3(\alpha, \beta; \delta - 1; z, t) = \frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)} z H_3(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z, t),$$

$$H_3(\alpha, \beta + 1; \delta; z, t) - H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \frac{\alpha}{\delta} z H_3(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z, t).$$

При $t = 0$ данные соотношения как частный случай перейдут в известные соотношения для функции Гаусса [2]:

$$F(\alpha, \beta; \delta; z) - F(\alpha, \beta; \delta - 1; z) = \frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)} z F(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z),$$

$$F(\alpha, \beta + 1; \delta; z) - F(\alpha, \beta; \delta; z) = \frac{\alpha}{\delta} z F(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z).$$

В этой работе доказана формула

$$\begin{aligned} &\delta(\delta - 1 - (2\delta - \alpha - \beta - 1)z) H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) + (\delta - \alpha)(\delta - \beta) z H_3(\alpha, \beta; \delta + 1; z, t) - \\ &- \delta(\delta - 1)(1 - z) H_3(\alpha, \beta; \delta - 1; z, t) = \\ &= \frac{-\delta z t}{1 - \alpha} H_3(\alpha - 1, \beta; \delta; z, t) + \frac{(\delta - \beta) z t}{1 - \alpha} H_3(\alpha - 1, \beta; \delta + 1; z, t). \end{aligned}$$

из которой при $t = 0$ как частный случай следует

$$\begin{aligned} &\delta(\delta - 1 - (2\delta - \alpha - \beta - 1)z) F(\alpha, \beta; \delta; z) + (\delta - \alpha)(\delta - \beta) z F(\alpha, \beta; \delta + 1; z) - \\ &- \delta(\delta - 1)(1 - z) F(\alpha, \beta; \delta - 1; z) = 0. \end{aligned}$$

Л и т е р а т у р а

1. Капилевич М. Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения, 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.

2. Градштейн И. С., Рызник И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). М.: Наука, 1963.

**Применение метода обобщенных степеней для построения
решений системы дифференциальных уравнений**

Мойсила-Теодореску

Ю. А. Гладышев*, Е. А. Лошкарева (Калуга, Россия)**

*v572264@yandex.ru, **losh-elena@yandex.ru

Система дифференциальных уравнений, известная как система Мойсила-Теодореску [1], определена в четырехмерном пространстве четырех действительных переменных $x_i, i = \overline{1, 4}$

$$Dq = \frac{\partial q_0}{\partial x_1} e_0 + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} e_1 + \frac{\partial q_2}{\partial x_3} e_2 + \frac{\partial q_3}{\partial x_4} e_3 = 0. \quad (1)$$

Искомая функция $q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ принимает значения в теле кватернионов.

Система (1) является обобщением известной системы Коши-Римана теории функций комплексного переменного. Однако если произведение комплексных решений системы Коши-Римана опять является решением этой системы, то система (1) этим свойством не обладает. В настоящем сообщении приведен метод, позволяющий хотя бы частично продвинуться в указанном направлении. С этой целью введем комплексные переменные $z_1 = x - 1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$ и соответствующие дифференциальные операторы. Систему (1) можно тогда записать в форме аналогичной системе Коши-Римана

$$\begin{pmatrix} \bar{D}_z V &= \frac{1}{2}(D_1 V - D_2 V) \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_2} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right) &= 0. \end{pmatrix} \quad (2)$$

Операторы D_1, D_2 не коммутируют, поэтому проводим операцию присоединения [2] (удвоение размерности решения) и получаем коммутирующие операторы D_1^c, D_2^c . На этой основе в предположении наличия у операторов D_1^c, D_2^c правых обратных и общего ядра обобщенных констант построены бинарные обобщенные степени $X_1^p X_2^q C_{pq}$ со свойствами

$$D_1^c X_1^p X_2^q C_{pq} = p X_1^{p-1} X_2^q C_{pq}, \quad D_2^c X_1^p X_2^q C_{pq} = q X_1^p X_2^{q-1} C_{pq}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Moisil G Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math. Paris. 1977. Vol. 57, No. 8, pp. 169–194.
2. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. КГУ им. К. Э. Циолковского, 1997.

**К спектральной теории конечных некомпактных графов с
суммируемыми матричными потенциалами**

Я. И. Грановский (Донецк)

yarvodoley@mail.ru

Рассмотрим граф \mathcal{G} , состоящий из $p_1 > 0$ бесконечных ребер и $p_2 \geq 0$ конечных ребер, $p_1 + p_2 := p$. Каждое ребро будем ассоциировать с конечным или бесконечным интервалом $(0, a_j), j \in \{1, \dots, p\}$.

На каждом бесконечном ребре $l_j, j \in \{1, \dots, p_1\}$ определим минимальный оператор $A_{l_j} f_{l_j} = -f''_{l_j} + Q_{l_j} f_{l_j}, Q_{l_j} = Q_{l_j}^* \in L^1(l_j, \mathbb{C}^{m \times m})$,

$$\text{dom}(A_{l_j}) = \left\{ f_{l_j} \in L^2(l_j, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f_{l_j}, f'_{l_j} \in AC_{\text{loc}}(l_j, \mathbb{C}^m), \\ A_{l_j} f_{l_j} \in L^2(l_j, \mathbb{C}^m), \\ f_{l_j}(0) = f'_{l_j}(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

На каждом конечном ребре $e_j, j \in \{p_1+1, \dots, p\}$ определим минимальный оператор $A_{e_j} f_{e_j} = -f''_{e_j} + Q_{e_j} f_{e_j}, Q_{e_j} = Q_{e_j}^* \in L^1(e_j, \mathbb{C}^{m \times m})$,

$$\text{dom}(A_{e_j}) := \left\{ f_{e_j} \in L^2(e_j, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f_{e_j}, f'_{e_j} \in AC_{\text{loc}}(e_j, \mathbb{C}^m), \\ A_{e_j} f_{e_j} \in L^2(e_j, \mathbb{C}^m), \\ f_{e_j}(0) = f'_{e_j}(0) = f'_{e_j}(a_j) = 0 \end{array} \right\}.$$

Это позволяет ввести минимальный оператор A_{\min} на графе \mathcal{G} : $A_{\min} := \bigoplus_{j=1}^p A_j$, $\text{dom}(A_{\min}) := \bigoplus_{j=1}^p \text{dom}(A_j)$.

Показано, что при сделанных предположениях $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ для каждого самосопряженного расширения \tilde{A} . В частности, это верно для расширения $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha, Q}$, задаваемого условием типа дельта:

$$\begin{cases} f \text{ непрерывна в } 0, \\ \sum_{j=1}^p f'_j(0) = \alpha f(0). \end{cases} \quad (1)$$

При $\alpha = 0$ условие (1) — хорошо известное условие Кирхгофа.

При дополнительном условии $xQ \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$ найдена оценка Баргмана для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^*$.

Также для звёздного графа \mathcal{G} найдена формула, выражающая матрицу рассеяния системы $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D\}$ через функцию Вейля, где \mathbf{H}_D — оператор задачи Дирихле на графе \mathcal{G} .

Доклад базируется на работе [1].

Л и т е р а т у р а

1. Я.И. Грановский, М.М. Маламуд, Х. Найдхардт. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами. Доклады Академии наук, 2019, т. 488, № 1, с. 5–10.

Исследование уравнений опрокинутой мелкой воды
Т. Ф. Долгих (Ростов-на-Дону, Россия)
dolgikh@sfedu.ru

Рассматривается система квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка в безразмерных переменных

$$h_t + (hv)_x = 0, \quad v_t + vv_x - gh_x = 0, \quad (1)$$

где $h(x, t)$ — толщина слоя жидкости, отсчитываемая от плоской поверхности (потолка), $v(x, t)$ — скорость течения, g — ускорение силы тяжести ($g > 0$).

Эта система, описывающая поведении капель воды на потолке (опрокинутая мелкая вода), отличается от уравнений мелкой воды знаком ускорения силы тяжести. Считается, что слой жидкости «при克莱ен» к горизонтальной твердой поверхности и ускорение силы тяжести направлено от поверхности. Это приводит к тому, что тип уравнений становится эллиптическим и уже не описывает волновые процессы.

Для исследования уравнений (1) использован вариант метода годографа на основе законов сохранения [1–4]. Решение построено в неявной форме и указан алгоритм построения явного решения при помощи интегрирования некоторой задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения для различных начальных распределений, которые показывают, что с течением времени на профиле свободной поверхности возникают «пики», на которых могут формироваться капли.

Л и т е р а т у р а

1. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. SIGMA. 2012. Vol. 8, 071. 16 p.
2. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015.
3. *Долгих Т. Ф.* Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2017. № 3-1 (195-1). С. 28–35.
4. *Долгих Т. Ф., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза. Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 85–96.

**Построение асимптотики для задачи с быстро
осциллирующими данными**

Н. С. Ивлева (Ростов-на-Дону, Россия)

ivleva.n.s@yandex.ru

В цилиндре $\mathbf{Q} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R} = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическом по времени решении системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v, \nabla) v + \nabla p &= \omega \begin{pmatrix} (1 - (x^2 + y^2))y \\ (1 - (x^2 + y^2))(-x) \end{pmatrix} \sin \omega t + \\ &+ b(x, y), \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ v|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\} \times \mathbb{R}$ — граница \mathbf{Q} , ω — большой параметр. Здесь $b(x, y) = -\nu \Delta a(x, y) + (a(x, y), \nabla) a(x, y)$, где $a(x, y)$ — какая-либо бесконечно дифференцируемая соленоидальная ($\operatorname{div} a = 0$) вектор-функция, которая обращается в ноль на окружности $\partial\Omega$. Таких вектор-функций a , как известно, бесконечно много (см., например, [1]).

Решение задачи в данной работе мы понимаем в классическом смысле.

В [2] построена соответствующая (1) усредненная задача и найдено некоторое ее стационарное невырожденное решение (u_0, p_0) . При этом для задачи (1) в окрестности этого решения выполняются все условия теоремы 1 работы [3], где рассмотрен широкий класс уравнений Навье-Стокса. Из этой теоремы следует, что в некоторой окрестности (u_0, p_0) существует и единственno $2\pi/\omega$ -периодическое по времени решение задачи (1). Кроме того, в [3] разработан алгоритм построения полной асимптотики решения.

Он применен в [2] для задачи (1) в окрестности (u_0, p_0) .

Соответствующие результаты автора настоящей статьи будут изложены в ее докладе на конференции.

Л и т е р а т у р а

1. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости (2-е изд.). М: Наука. 1970.
2. Ивлева Н. С. Задачи с быстро осциллирующими данными. Два примера построения асимптотик. Динамические системы. 2019. Том. 9(37), № 3, стр. 297–310.
3. N. Ivleva, V. Levenshtam Asymptotic analysis of the generalized convection problem, Eurasian Math. J. 2015. Vol. 6. No 1. P. 41–55.

**Исследование структуры решений нелинейного уравнения
параболического типа**

В. А. Лукьяненко, А. А. Корнuta (Симферополь, Россия)
art-inf@yandex.ru
korn_57@mail.ru

Рассматривается структура решения нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа, которое описывает динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с контуром обратной связи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \quad \mu > 0,$$

$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$, $u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t)$, здесь Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат, $\mu > 0$ – коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, Q – оператор поворота на угол h ($Q^m = I$ [3]), $K > 0$ – коэффициент пропорциональный интенсивности входящего потока, γ ($0 < \gamma < 1$) – коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины.

Получены решения для частных случаев, которые используются в асимптотическом анализе указанного параболического уравнения в задаче для круга.

С помощью метода центральных многообразий, доказано, что в результате бифуркации из пространственно однородного стационарного решения происходит рождение пространственно неоднородных стационарных решений для круга, получены периодические решения типа бегущей волны.

Л и т е р а т у р а

1. Ахманов С. F. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. Наука. 1990.
2. Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. МАКС Пресс. 2008.
3. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инвалютивными операторами и их приложения. — Ростов: Издательство Ростовского университета, 1988.

**О непрерывной зависимости от параметра множества
решений операторного уравнения**

В. Мерчела (Тамбов, Россия)

merchela.wassim@gmail.com

Для отображений, действующих из метрического пространства (X, ρ_X) в пространство Y , на котором определено расстояние (то есть отображение $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ такое, что $d_Y(x, u) = 0 \Leftrightarrow x = u$), определяется следующий аналог свойства накрывания. Множеством α -накрывания отображения $f: X \rightarrow Y$ названо множество

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\alpha[f] = \{(x, \tilde{y}) \in X \times Y : \exists \tilde{x} \in X \ f(\tilde{x}) = \tilde{y} \text{ и} \\ \rho_X(\tilde{x}, x) \leq \alpha^{-1}d_Y(\tilde{y}, f(x))\}. \end{aligned}$$

Для заданных $\tilde{y} \in Y$, $\Phi: X \times X \rightarrow Y$ рассматривается уравнение $\Phi(x, x) = \tilde{y}$. Сформулирована теорема о существовании решения. Исследуется проблема устойчивости решений к малым изменениям отображения Φ . А именно, рассмотрена последовательность таких отображений $\Phi_n: X \times X \rightarrow Y$, $n = 1, 2, \dots$, что для всех $x \in X$ выполнено $(x, \tilde{y}) \in \text{Cov}_\alpha[\Phi_n(\cdot, x)]$, отображение $\Phi_n(x, \cdot)$ является β -липшицевым и для решения x^* исходного уравнения имеет место сходимость $d_Y(\tilde{y}, \Phi_n(x^*, x^*)) \rightarrow 0$. При выполнении этих условий утверждается, что при любом n существует x_n^* такой, что $\Phi_n(x_n^*, x_n^*) = \tilde{y}$ и $\{x_n^*\}$ сходится к x^* в метрическом пространстве X . Также в статье рассмотрено уравнение $\Phi(x, x, t) = \tilde{y}$ с параметром t — элементом топологического пространства. Предполагается, что $(x, \tilde{y}) \in \text{Cov}_\alpha[\Phi_n(\cdot, x, t)]$, отображение $\Phi_n(x, \cdot, t)$ является β -липшицевым, а отображение $\Phi_n(x, x, \cdot)$ — непрерывным. Доказаны утверждения о полунепрерывной сверху и снизу зависимости множества решений от параметра t .

Л и т е р а т у р а

1. Arutyunov A. V., Avakov E. R., Zhukovskiy S. E. Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points. SIAM J. Optim. 2015. Том. 25, №. 2, стр. 807–828.

<https://doi.org/10.1137/140980612>

2. Мерчела В. К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств. Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2018. Том. 23, №. 121, стр. 65–73.
<https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73>

**Бифуркация рождения циклов в динамических системах с
симметрией применительно к задаче конвекции в
горизонтальном слое жидкости с примесью**
И. В. Моршнева
(Ростов-на-Дону, Россия)
ivmorshneva@sfedu.ru

Рассматривается задача о возникновении конвекции в бесконечном горизонтальном слое жидкости с примесью. Границы слоя предполагаются свободными, изотермическими, и концентрация примеси на каждой из них считается заданной. Изучаются автоколебания, возникающие при колебательной потере устойчивости известного стационарного режима относительно пространственных возмущений, периодических по однородным переменным. Уравнения возмущений имеют группу симметрии $O(2) \times O(2)$, и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией. Из результатов теории следует, что в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от равновесия могут ответвиться циклы, которым отвечают автоколебания типа горизонтальных бегущих волн, косых бегущих волн и различных нелинейных суперпозиций косых бегущих волн.

В данной работе проводится анализ характера ветвления и устойчивость возникающих пространственных автоколебательных режимов в горизонтальном слое бинарной смеси. Для этого были найдены аналитические выражения для коэффициентов системы уравнений разветвления рассматриваемой задачи. Эти коэффициенты представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. Выяснено, что изменения характера ветвления автоколебаний связаны с обращением в нуль или бесконечность одного из коэффициентов уравнений разветвления. Найдены значения параметров, при которых это происходит. Для возникающих автоколебательных режимов выписаны первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности.

Кластеризация данных на основе Hubert's G statistics

В. А. Нестеренко (Ростов-на-Дону, Россия)

neva09@mail.ru

В предлагаемой работе рассматривается новый метод кластеризации, основанный на использовании G статистик Губерта [1]:

$$G = \frac{2}{N(N-1)\sigma_P\sigma_A} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (P_{ij} - m_P)(A_{ij} - m_A)$$

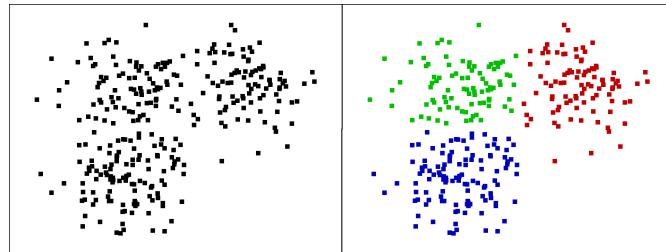
$$P_{ij} = \frac{1}{1 + d_{ij}^2/d_0^2} \quad d_{ij} - \text{расстояние между объектами } U_i, U_j \\ d_0 - \text{масштабный множитель}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если объекты } U_i, U_j \text{ принадлежат одному кластеру} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Обычно, в задачах кластеризации данных статистики Губерта используются для оценки качества кластеризации [2].

В данной работе задача кластеризации решается следующим образом: по заданной матрице близости P_{ij} объектов $\{U_1, \dots, U_N\}$ находится такая матрица смежности A_{ij} , для которой значение статистики G будет максимальным. Полученная матрица A_{ij} соответствует набору кластеров в исходном множестве объектов.

Результат применения предлагаемого метода кластеризации приведён на рисунке (кластеры отмечены цветом):



Л и т е р а т у р а

1. Hubert L. J., Levin J. R. A general statistical framework for assessing categorical clustering in free recall. Psychological Bulletin. 1976. vol. 83, pp. 1072-1080.
2. Sergios Theodoridis and Konstantinos Koutroumbas. Pattern Recognition – 2nd Edition. Amsterdam ; London : Academic Press, 2003. (16.3 Hypothesis Testing in Cluster Validity, p.598)

**О разрешимости обобщенной краевой задачи для
полулинейных дифференциальных включений дробного
порядка¹**

Г. Г. Петросян (Воронеж, Россия)
garikpetrosyan@yandex.ru

Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Для $a > 0, h > 0$ обозначим $\mathcal{D} = C([-h; a]; E)$, $\mathcal{C} = C([-h; 0]; E)$. Рассматривается общенная краевая задача для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка:

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$Qx \in Sx, \quad (2)$$

где ${}^C D$ - дробная производная Капуто порядка $q \in (0; 1)$, функция $x_t \in \mathcal{C}$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h; 0]$, при следующих предположениях:

(A) $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ - линейный замкнутый оператор в E порождающий ограниченную C_0 полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

(F1) для всех $x \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, a]$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

(F3) найдется функция $\alpha \in L^\infty([0, a])$ такая, что $\|F(t, x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|_{\mathcal{C}})$ для п.в. $t \in [0, a], x \in \mathcal{C}$;

(F4) найдется функция $\mu \in L^\infty([0, a])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ выполняется $\chi(F(t, \Omega)) \leq \mu(t)\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega)$ для п.в. $t \in [0, a]$, где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E , $\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup_{t \in [-h, 0]} e^{-pt}\chi(\Omega(t))$;

(Q) $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ линейный ограниченный оператор;

(S) Мультиотображение $S : \mathcal{D} \rightarrow Kv(\mathcal{C})$ является пн.св. и переводит ограниченное множество в относительно компактное.

Л и т е р а т у р а

1. Афанасова М. С., Петросян Г. Г. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве. Известия вузов. Математика. 2019. №. 9. С. 3-15.

2. Петросян Г. Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. №. 5. С. 1355-1358.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

**Рациональные ряды Фурье – Чебышёва на отрезке
и приближения функций $|x|^s$**

Ровба Е. А., Пощейко П. Г. (Гродно, Беларусь)

rovba.ea@gmail.com pahamatby@gmail.com

Алгебраические дроби, введенные А. А. Марковым [1], являются естественным обобщением полиномов П. Л. Чебышёва и обладают рядом замечательных свойств. Однако свойством ортогональности, вообще говоря, не обладают [2]. Отсюда возникает задача нахождения условий, при которых система алгебраических дробей Чебышёва – Маркова являлась бы ортогональной на отрезке $[-1, 1]$. При выполнении таких условий, особый интерес вызывает изучение аппроксимационных свойств рациональных рядов Фурье, по найденной ортогональной системе, и методов их суммирования.

Исследование полиномиальной аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ берет свое начало в работах С. Н. Бернштейна [3]. Являясь примером функции, имеющей значительное влияние на развитие теории аппроксимаций, задачи, связанные с изучением ее наилучших приближений актуальны и в наше время [4].

В докладе планируется осветить вопросы, связанные с методами рациональной аппроксимации, в основе которых лежат ряды Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова и методы их суммирования (Фейера, Валле Пуссена, Джексона, Рисса). Исследованы аппроксимационные свойства указанных методов в приближениях функций $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$. Получены асимптотические оценки равномерных приближений и оценки наилучших приближений данными методами. Для методов суммирования с положительными ядрами найдены асимптотически точные верхние грани уклонений на классах $MH^{(\gamma)}[-1, 1]$.

Л и т е р а т у р а

1. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М. : Гостехиздат, 1948.
2. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно : ГрГУ, 2001.
3. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени. Известия АН СССР. Серия математическая. 1938. Т. 2, №. 2, стр. 169–190.
4. *Пекарский А. А.* Аппроксимация функции z^α рациональными дробями в области с нулевым внешним углом. Математические заметки. 2012. Т. 91, № 5, стр. 761–772.

**Моделирование клеточных упаковок в сферических
эпителиальных монослоях**
Д. С. Рошаль, С. Б. Рошаль (Ростов-на-Дону, Россия)
K. Azzag, E. Le Goff, S. Baghdiguian (Монтпелье, Франция)
rochal.d@yandex.ru

Проблема плотнейших упаковок структурных единиц на сферической поверхности обретает новую актуальность. Широкий интерес вызывают как классические математические проблемы Томсона и Таммеса, так и их приложения к сферическим коллоидным кристаллам, вирусам и эпителиальным монослоям. Законы, лежащие в основе таких упаковок — универсальны, и мы изучаем их, сравнивая живые [1,2] и неживые двумерные системы, самоорганизующиеся на сферической поверхности. Структурные элементы таких физических систем образуют гексагональный порядок со специфическими линейными топологическими дефектами — рубцами и складками, в которых чередуются частицы, имеющие 5 и 7 соседей. Несмотря на то что в структурной организации биологических систем участвуют те же физические и топологические законы, в эпителиальных клеточных монослоях такие дефекты ранее не наблюдались.

Мы обнаружили эти дефекты в фолликулярном сферическом эпителии асцидий. Удивительно, но складки, рубцы и ранее неизвестные нелинейные топологические дефекты появляются в эпителии, даже когда количество клеток в нем значительно меньше, чем пороговое значение, известное для неживых сферических структур. В недавно опубликованной статье [1] мы объяснили этот результат различиями в размерах клеток и проверили нашу гипотезу, рассматривая самосборку частиц разных случайных размеров на сферической поверхности. Таким образом, мы получили сферические упаковки с топологическими дефектами, аналогичными тем, которые наблюдаются в сферических эпителиальных монослоях асцидий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-32-90134.

Л и т е р а т у р а

1. *Roshal D. S., Azzag K., Le Goff E., Rochal S. B., Baghdiguian S. Crystal-like order and defects in metazoan epithelia with spherical geometry. Scientific Reports. 2020. Том. 10, № 3, стр. 1–11.*
2. *Konevtsova O. V., Roshal D. S., Bozic A. L., Podgornik R., Rochal S. B. Hidden symmetry of the anomalous bluetongue virus capsid and its role in the infection process. Soft Matter. 2019. Том. 15, № 38, стр. 7663–7671.*

Некоторые весовые пространства аналитических функций

в единичном диске со смешанной нормой

И. Ю. Смирнова (Ростов-на-Дону, Россия)

your@email.com

Доклад основан на диссертационной (квалификационной) работе аспиранта ЮФУ. Исследуются некоторые весовые пространства аналитических функций в единичном диске со смешанной нормой, определенные в терминах коэффициентов Фурье. Говоря о подходе, который основан на введении смешанной нормы упомянем, что в настоящее время существует ряд работ по пространствам типа Бергмана с интегральной смешанной нормой. Эти работы посвящены вопросам ограниченности проекции Бергмана и некоторым свойствам пространств Бергмана, таким как двойственность, интерполяция и другие важные свойства. Отметим, например, работы Gu, M.Jevtic, S. Gadbois, Y.Liu и других авторов. В диссертационной работе используется иной подход, развитый в серии недавних работ А.Н.Карапетянца и С.Г.Самко (2016-2018). В этих работах развивается общий подход введения и исследования новых пространств со смешанной нормой, который, в первую очередь, реализован в контексте единичного диска и эллиптического случая гиперболической геометрии в диске. Определение самих пространств осуществляется в терминах коэффициентов Фурье, так что функции из этих пространств являются обобщенными дробными производными аналитических функций с lq - суммируемыми коэффициентами Тейлора. Этот важный факт отличает введенные пространства от ранее рассмотренных пространств со смешанной нормой, но одновременно позволяет с большей эффективностью использовать смешанную норму для характеристики функций из этих пространств. Основной мотивацией данной работы является дальнейшее развитие методов исследования классов операторов Теплица и порождаемых этими операторами алгебр в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой и с, вообще говоря, неограниченными символами. Для этого, в частности, необходима характеристика самих весовых пространств Бергмана со смешанной нормой, исследование структуры этих пространств, позволяющее в дальнейшем получить необходимые представления для изучения соответствующих теплицевых операторов. Диссертационная работа фактически состоит из двух частей. В первой строится общая теория весовых пространств со смешанной нормой по аналогии с не весовым случаем, рассмотренным

в работах А.Н.Карапетянича и С.Г.Самко. Здесь немаловажным является факт введение в рассмотрение весового проектора Бергмана. Данная часть является основой для дальнейшего исследования. Вторая часть посвящена более детальному изучению вопроса при выборе конкретного весового пространства Лебега в качестве пространства для коэффициентов Фурье. Продолжением исследований могут быть различные варианты выбора пространств для коэффициентов Фурье: пространства Морри, Орлича, в том числе пространства переменного порядка, и другие пространства функций нестандартного роста, возникающие в современном анализе. Исследования были поддержаны научным грантом Российского фонда фундаментальных исследований "Пространства функций нестандартного роста и некоторые классы операторов в этих пространствах проект 18-01-00094 (2018-2020).

**Модельные поверхности однородных CR-многообразий и
их тип по Блуму-Грэму**

М. А. Степанова (Москва, Россия)

step_masha@mail.ru

В работе [1] метод модельной поверхности (см. [3]) был распространен с класса вполне невырожденных многообразий на более широкий класс всех многообразий конечного типа по Блуму-Грэму (определение типа см. [2]), а также были введены невырожденные многообразия, для которых условие полной невырожденности было заменено на другое, значительно более слабое, условие. В связи с этим возникли новые вопросы, сформулированные в работе [1]. Нас будут интересовать те из них, которые связаны с голоморфно однородными многообразиями.

Первый из вопросов таков: рассмотрим росток голоморфно однородного многообразия. Верно ли, что его модельная поверхность также голоморфно однородна? Ответ утвердителен вне зависимости от того, является ли тип конечным или бесконечным.

Другой естественный вопрос о голоморфно однородных многообразиях касается их типа: какие типы по Блуму-Грэму для таких многообразий могут быть реализованы? В типе фигурируют два вида данных: веса и кратности. В [1] было доказано, что веса не могут быть произвольными. Кратности в типе также не могут быть произвольными, будут приведены оценки, которые являются в некотором смысле точными.

Л и т е р а т у р а

1. *Beloshapka V. K.* CR-manifolds of finite Bloom-Graham type: the model surface method. Russian Journal of Mathematical Physics, Vol.27, No.2, 2020.
2. *Bloom, T., Graham, I.* On 'Type' Conditions for Generic Real Submanifolds of C^n . Inventiones mathematicae 40 (1977): 217-244.
3. *Белошапка В. К.* Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации. УМН, 57:1(343) (2002), 3–44; Russian Math. Surveys, 57:1 (2002), 1–41

**О некоторых приложениях и проблемах математического
моделирования многослойных структур
полупроводниковой оптоэлектроники**
М. А. Степович*, В. В. Калманович, Д. В. Туртин***,
Е. В. Серегина**** (*, **, ****Калуга, ***Иваново, Россия)**
***m.stepovich@rambler.ru, **v572264@yandex.ru,
turtin@mail.ru, *evfs@yandex.ru**

Математическое моделирование процессов взаимодействия заряженных частиц или электромагнитного излучения с конденсированным веществом и связанные с ними процессы тепломассопереноса сопряжены с проблемами как чисто математического характера, так и с трудностями проверки разрабатываемых моделей. Отметим, что построение и анализ математических моделей даже для однородных материалов полупроводниковой оптоэлектроники является довольно сложной задачей [1, 2]. В настоящей работе с использованием аналитического матричного и численных методов [3] рассмотрены некоторые проблемы математического моделирования многослойных структур, прежде всего проблемы построения и решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса, описывающих эти модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

Л и т е р а т у р а

1. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, no. 2, pp. 259–262. <https://link.springer.com/article/10.1134/S199508021802021X>
2. Stepovich Mikhail A., Turtin Dmitry V., Seregina Elena V., Kalmanovich Veronika V. On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors. ITM Web of Conferences. 2019. Vol. 30, 07014 (7 pp.). <https://doi.org/10.1051/itmconf/20193007014>
3. Серегина Е. В., Калманович В. В., Степович М. А. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 172, стр. 108–116. <http://mi.mathnet.ru/into549>

**ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ,
 ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ МАРКОВСКУЮ
 РАНДОМИЗИРОВАННУЮ СТРАТЕГИЮ
 ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**
В. В. Шамраева, В. М. Калинин (Москва, Россия)
vvshamraeva@fa.ru

Пусть $E(t)$ — случайный процесс, описывающий эволюцию сложной технической системы (СТС) во времени, ξ — время безотказной работы системы, η — время планового предупредительного обновления системы, γ_1 — длительность планового профилактического обновления системы, γ_2 — длительность восстановительной работы при внеплановом аварийном обновлении системы [1]. Рассматриваются задачи, связанные с эффективностью функционирования и оптимизации интенсивности эксплуатационных затрат для стратегии обслуживания СТС без учёта структуры с мгновенной индексацией отказа [2]-[3]. Период регенерации $X = \min(\xi, \eta) + \gamma_1 I(\eta < \xi) + \gamma_2 I(\xi \leq \eta)$ с математическим ожиданием $EX(G)$. На множестве разрешённых стратегий $G(x)$ требуется определить оптимальную стратегию, для которой достигается экстремум функционалов эффективности, определённых на траекториях случайного процесса $E(t)$. На данном этапе получена оценка снизу для минимума средних удельных затрат, учитывая остаточный ресурс элементов такой системы.

Теорема. Оптимальные сроки проведения очередного планового обновления СТС не могут быть менее чем $\tau_0^1 + \tau_0^2$, где

$$\tau_0^1 = \min_{[0,+\infty)} \frac{c_1 E(\gamma_1) \bar{F}(x) + c_3 E(\gamma_2) F(x)}{\int\limits_0^x \bar{F}(y) dy}, \quad \tau_0^2 = \min_{[0,+\infty)} \frac{C_{\text{обор}} E(\xi_z)}{E(\xi) \int\limits_0^x \bar{F}(y) dy},$$

$F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения с.в. ξ и η соответственно, $C_{\text{обор}}$ — сметная стоимость оборудования ($C_{\text{пес}} = C_{\text{обор}} \frac{E(\xi_z)}{E(\xi)}$ — издержки при неиспользовании остаточного ресурса оборудования).

Целевой функционал в этой теореме представляет собой отношение двух функционалов. Вопросы оптимизации интегральных дробно-линейных функционалов рассматриваются в [4]-[5]. Экономическое обоснование эффективности управления восстановительным циклом СТС с учетом остаточного ресурса дано в [6]. Дальнейшие исследования будут посвящены исследованию методов оптимизации применительно к элементам СТС, допускающих восстановление работоспособности во время непредвиденных ремонтов без восстановления

первоначального уровня их безотказности (минимальные восстановления).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каштанов В. А. Общие принципы постановки и решения проблемы технического обслуживания сложных систем. — Надежность, 2002. N 2. С. 47–56.
2. Калинин В.М., Шамраева В.В. Вероятностный анализ характеристик восстановительного цикла сложной технической системы. Образовательные ресурсы и технологии. 2019. N 1 (26). С. 64-74.
3. Шамраева В.В., Калинин В.М. Вероятностный анализ эффективности функционирования сложных технических систем. В сборнике: СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXX. 2019. С. 315-316.
4. Borza M., Rambely A.S., Saraj M. Solving Linear Fractional Programming Problems with Interval Coefficients in the Objective Function. A New Approach// Appl. Mat. Sci. 2012. V. 6. N 69. P. 3443-3452.
5. Hasan M.B., Acharjee S. Solving LFP by Converting It into a Single LP // Intern. J. Oper. Res. 2011. V. 8. N 1. P. 1-14.
6. Шамраева В.В. Экономическая эффективность эксплуатации элементов гражданских зданий с учётом остаточного ресурса: вероятностно-статистический подход. Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Экономика и право. 2020. № 2. С. 61-68.

О точных оценках производных четного порядка в пространствах
Соболева

Шейпак И.А. (Россия, г. Москва)

МГУ имени М.В.Ломоносова

iasheip@mail.ru

Для функций $f \in \mathcal{H} := \mathring{W}_2^n[-1; 1]$, фиксированного числа $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и фиксированной точки $a \in (0; 1)$ изучаются нормы функционалов

$$A_{n,k}(a) := \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=1} |f^{(k)}(a)|.$$

Эти функционалы оказываются очень полезным инструментом при изучении операторов вложения $J : \mathring{W}_2^n[-1; 1] \hookrightarrow \mathring{W}_{\infty}^k[-1; 1]$. При этом точная константа вложения указанных пространств совпадает с нормой оператора J и равна

$$\|J\| = \Lambda_{n,k} := \sup_{a \in [-1; 1]} A_{n,k}(a).$$

В работе [1] были получены формулы для констант $\Lambda_{n,0}^2$, $\Lambda_{n,1}^2$ и $\Lambda_{n,2}^2$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A_{n,k}^2(x)$ и предъявлены формулы для $\Lambda_{n,4}^2$ и $\Lambda_{n,6}^2$.

Некоторые вычисления удобнее проводить для на отрезке $[0; 1]$. Несложно установить формулы пересчета констант вложения, определенных для разных отрезков:

$$A_{n,k}^2(x) = A_{n,k,[-1;1]}^2(x) = 2^{2n-2k-1} A_{n,k,[0;1]}^2(x), \quad \Lambda_{n,k}^2 = \Lambda_{n,k,[-1;1]}^2 = 2^{2n-2k-1} \Lambda_{n,k,[0;1]}^2.$$

В соответствии с теоремой Рисса функционал $f \mapsto f^{(k)}(a)$ в пространстве $\mathring{W}_2^n[0; 1]$ задается с помощью функции $g_{n,k}$: $f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) g_{n,k}^{(n)}(x, a) dx$, при этом

$$A_{n,k}(a) = \|g_{n,k}\|_{\mathring{W}_2^n[0;1]}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами:*

$$g_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!} (1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a) & x \in [0; a] \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!} a^{n-k} (1-x)^n h_{n,k}(x, a), & x \in [a; 1]. \end{cases},$$

$$\varepsilon de h_{n,k}(x, a) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} C_{2n-1-k}^{n-1-l} x^{n-1-l} a^l \sum_{m=0}^l C_{n-1+m}^m x^m.$$

Однако при больших n и k из-за растущей сложности вычислений формулы (1) оказываются малопригодными для практического применения. Далее мы применяем модификацию метода предложенного в [1].

Рассматриваются ортогональная в $L_2[-1; 1]$ система полиномов Лежандра, определяемая формулой Родрига $P_n(x) := \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$. Первообразная порядка $m > 0$ полинома P_n определяется формулой $P_n^{(-m)} := \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n-m)}$.

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 1. *Функции $A_{n,k}^2(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A_{n,k}^2(x) = A_{n-2,k-2}^2(x) - (P_{n-2}^{(k-n)}(x))^2 \left(n - \frac{3}{2}\right) - (P_{n-1}^{(k-n)}(x))^2 \left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Для величин $A_{n,k}^2(x)$ справедливо соотношение*

$$\frac{dA_{n,k}^2(x)}{dx} = -P_{n-1}^{(k-n+1)}(x) \cdot P_n^{(k-n+1)}(x).$$

Теорема 2. *Точка $x = 0$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,k}^2(x)$ на отрезке $[-1; 1]$.*

С помощью лемм 1, 2 и теоремы 2 доказывается следующий основной результат.

Теорема 3. *Точные значения констант вложения на отрезке $[-1; 1]$ при $k = 2l$, $l = 0, 1, \dots$ имеют вид*

$$\Lambda_{n,k}^2 := A_{n,k}^2(0) = \frac{((k-1)!!)^2}{2^{2n-k-1}((n-(k/2)-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00240).

Литература

- [1] Калябин Г.А. Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\dot{W}_2^n[0; 1]$ // Труды МИАН, 2010, Т.269, 143–149.
- [2] Мукосеева Е.В., Назаров А.И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения// Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, т.425, 35–45.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ШАРОВЫХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

М. У. Яхшибоев (Ташкент, Узбекистан)
m.yakhshiboev@gmail.com

Известны три способа получения асимптотического разложения дробного интеграла Римана-Лиувилля: метод последовательных разложений [1], [2], метод, основанный на аналитическом продолжении преобразования Меллина и использовании равенства Парсеваля [3], [4], [5], и метод теории обобщенных функций [6].

В работе N. Berger, R.A. Handelsman [7] даны асимптотические разложения дробного интеграла $(I_{a+,x^p}^\alpha f)(x)$ по функции x^p в следующих двух случаях:

а) при $x \rightarrow +0$ в предположении, что функция $f(t)$ имеет при $t \rightarrow +0$ разложение $f(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{\mu_m}$;

б) при $x \rightarrow +\infty$ с условием, что $f(t)$ имеет асимптотику $f(t) \sim e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{-\mu_m}$, $a \geq 0$, где μ_m – возрастающая последовательность, причем $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = +\infty$. Исследование опирается на развитые в работах R.A. Handelsman, J.S. Lew [4,5] методы, основанные на использовании равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h^*(s) \varphi^*(s) x^{-s} ds$$

для преобразования Меллина

$$\varphi^*(s) = M\{\varphi(t); s\} = \int_0^\infty t^{s-1} \varphi(t) dt. \quad (1)$$

Эти методы позволяют находить асимптотические разложения для шаровых дробных интегралов порядка $\alpha > 0$ в R^n определяемых равенствами

$$(B_+^\alpha \varphi)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|y|<|x|} \frac{(|x|^2 - |y|^2)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y) dy, \quad (2)$$

$$(B_-^\alpha \varphi)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|y|>|x|} \frac{(|y|^2 - |x|^2)^\alpha}{|x-y|^n} \varphi(y) dy, \quad (3)$$

где $\gamma_{n,\alpha} = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi^n}\Gamma(\alpha)}$. Данная работа обобщает эти исследования и посвящена изучению асимптотического разложения шаровых дробных интегралов с произвольной плотностью. Предполагается, что плотность $\varphi(y)$ имеет следующее асимптотическое разложение при $|y| \rightarrow +\infty$

$$\varphi(y) \sim e^{-a|y|} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(y') |y|^{-\mu_m}, \quad y' = \frac{y}{|y|}, \quad (4)$$

где коэффициенты $a_m(y') \in C^\lambda(S^{n-1}), \lambda > \frac{3n-4}{2}$, так что $a_m(y')$ разлагается в абсолютно сходящиеся ряды Фурье-Лапласа по сферическим гармоникам

$$a_m(y') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} Y_{k,\nu}(y'),$$

$Y_{k,\nu}(y')$ —базисные сферические гармоники, $d_n(k)$ —размерность подпространства сферических гармоник порядка k . Более сложным является случай когда $\varphi(y)$ имеет асимптотику (4). Известно, что один способ нахождения асимптотического разложения шаровых дробных интегралов (2) и (3) методом последовательных разложений получен в работе [8]. Дадим асимптотическое представление (2) и (3) метода с помощью равенства Парсеваля для преобразования Меллина.

В данной работе получены следующие результаты:

1) если $\varphi(y)$ при $|y| \rightarrow 0$ имеет асимптотику $\varphi(y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(y') |y|^{\mu_m}$, то при $|x| \rightarrow 0$

$$(B_+^\alpha \varphi)(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m(x') |x|^{2\alpha+\mu_m},$$

где $d_m(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \frac{\Gamma(\frac{n+k+\mu_m}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{n+k+\mu_m}{2})} Y_{k,\nu}(x')$;

2) если $\varphi(y)$ при $|y| \rightarrow +\infty$ обладает асимптотическим представлением (4), то при $|x| \rightarrow +\infty$

$$(B_+^\alpha \varphi)(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m M\{\varphi; 2(m+n)\}}{m! \Gamma(\alpha-m)} |x|^{-2(m+n-\alpha)},$$

если $a > 0$, (M - преобразование Меллина (1)) и

$$(B_+^\alpha \varphi)(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x') |x|^{2\alpha-\mu_m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m M\{\varphi; 2(m+n)\}}{m! \Gamma(\alpha-m)} |x|^{-2(m+n-\alpha)},$$

если $a = 0, \mu_m \neq n, n + 1, \dots$, где

$$b_m(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{n+k-\mu_m}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{n+k-\mu_m}{2}\right)} Y_{k,\nu}(x').$$

3) если $\varphi(y)$ при $|y| \rightarrow +\infty$ обладает асимптотическим представлением (4), то при $|x| \rightarrow +\infty$

$$(B_-^\alpha \varphi)(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x') |x|^{2\alpha - \mu_m},$$

если $a = 0$, где $q_m(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+\mu_m}{2} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\mu_m}{2}\right)} Y_{k,\nu}(x')$.

Литература

1. Риекстыныш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т.1, 391 с.
2. Kilbas A.A. Asymptotic expansions for fractional integrals and their applications. Collego Engin., Nihon Unev., 1990, p. 70–79.
3. Риекстыныш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981. Т.3, 370 с.
4. Handelsman R.A., Lew J.S. Asymptotic expansion of a class of integral transforms via Mellin transforms // Arch.Ration.mech.and Analysis3 1969. Vol.35, No. 5, p.382–386.
5. Handelsman R.A., Lew J.S. Asymptotic expansion of a class of integral transforms With algebraically dominated kernels // T.Math.Anal.and Appl.1971.Vol.35, No. 2, p.405–433.
6. McClure J.P., Wong R. Exact remainders for asymptotic expansion of fractional integrals // J. Inst. Math. And Appl. 1979. Vol. 24, No. 2, p.139–147.
7. Berger N., HandelsmanR.A. Asymptotic evaluation of fractional integral operators With applications // SIAMJ.Math.Anal.1975, Vol.6, N5.P.766–773.
8. Яхшибоев М.У. Асимптотические представления потенциала Рисса. Ростов н/д, 1992. 40 с. Деп. в ВИНИТИ.12.03.1992, № 286–B92.