VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

В.В.Козлов, академик РАН (председатель)
Н.Б.Енгибарян, д.ф.-м.н. (зам. председателя)
А.Н.Карапетянц, д.ф.-м.н. (зам. председателя)
А.Г.Сергеев, иностранный член НАН Армении (зам. председателя)
Р.В.Амбарцумян, академик НАН Армении
В.А.Бабешко, академик РАН
Р.Г. Бархударян, к.ф.-м.н.
И.В.Волович, член-корр. РАН
В.С.Захарян, академик НАН Армении
М.И.Карякин, д.ф.-м.н.
А.А.Саакян, член-корр НАН Армении
Д.В.Трещёв, член-корр. РАН
А.Х.Хачатрян, д.ф.-м.н.
А.К.Цих, д.ф.-м.н.
Е.М.Чирка, член-корр. РАН

ЛОКАЛЬНЫЙ ОРГКОМИТЕТ:

А.Н.Карапетянц (председатель)
О.Г.Авсянкин (ученый секретарь)
А.О. Ватульян
М.И.Карякин
В.М.Поркшеян
В.В.Шамраева

11-16 сентября 2016 г.
г. Ростов-на-Дону, Россия
http://rus-arm.sfedu.ru
e-mail: rusarm2016@gmail.com
Регистрация до 15 августа 2016 года
Рабочие языки: русский, английский

При поддержке:

ДонТур судоходная компания

ОРГАНИЗАТОРЫ:

Институт математики НАН Республики Армения, г. Ереван

Математический институт им. Стеклова РАН

Донской государственный технический университет (ДГТУ)

Южный федеральный университет (ЮФУ)

СПОНСОРЫ:

Russian Foundation For Basic Research

International Society for Analysis, its Applications and Computation

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике

(г. Ростов-на-Дону, 11 – 16 сентября 2016 г.)

VI Russian-Armenian conference on mathematical analysis, mathematical physics and analytical mechanics

(Rostov-on-Don, 11 - 16 September 2016)

Материалы конференции/Proceedings

Ростов-на-Дону

2016

УДК 519.71:519.72:004

С 34

Редакционная коллегия (программный коммитет):

академик РАН В.В. Козлов, д.ф.-м.н. Н.Б. Енгибарян, д.ф.-м.н. А.Н. Карапетянц, иностранный член НАН Армении А.Г. Сергеев, академик НАН Армении Р.В. Амбарцумян, академик РАН В.А. Бабешко, к.ф.-м.н. Р.Г. Бархударян, член-корр. РАН И.В. Волович, академик НАН Армении В.С. Захарян, д.ф.-м.н. М.И. Карякин, член-корр НАН Армении А.А. Саакян, член-корр. РАН Д.В. Трещёв, д.ф.-м.н. А.Х. Хачатрян, д.ф.-м.н. А.К. Цих, член-корр. РАН Е.М. Чирка.

VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике

С 34 [Электронный ресурс] : материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (г. Ростов-на-Дону, 11 – 16 сентября 2016 г.) / под общ. ред. А.Н. Карапетянца ; Дон. гос. техн. ун-т. — Электрон. текстовые дан. — Ростов н/Д: ДГТУ, 2016. — 43 с. — Режим доступа: http://rus-arm.sfedu.ru/thethis.pdf .

ISBN 978-5-7890-1160-7

Представлены доклады участников VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике, проводимого математическим институтом им. В.А.Стеклова Российской академии наук (МИАН), институтом математики НАН Республики Армения (г. Ереван) на базе и при поддержке Донского государственного технического университета (ДГТУ) и Южного федерального университета (ЮФУ), а также при поддержке российского фонда РФФИ и международного сообщества ISAAC (mathisaac.org).

Рассмотрены проблемы математического анализа, модели, задачи и методы математической физики и аналитической механики.

Сборник предназначен для преподавателей, научных сотрудников, аспирантов, магистрантов, бакалавров.

УДК 517: 51-72: 51-73

ISBN 978-5-7890-1160-7 © ДГТУ, 2016

1 Анализ

О. Г. Авсянкин (Ростов–на–Дону, Россия)
avsyanki@math.rsu.ru

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ пространство измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |x|^\alpha \, dx \right)^{1/p}$$

Определим на $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ оператор K формулой

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p, q < \infty$, ядро $k(x,y)$ оператора K однородно степени $(-n)$ и удовлетворяет условиям:*

$$\operatorname*{esssup}_{\sigma \in S_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(\sigma,y)|^r |y|^{rn/p' - n - \alpha r/p} \, dy < \infty,$$

$$\operatorname*{esssup}_{\sigma \in S_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,\sigma)|^r |x|^{rn/p - n + \alpha r/p} \, dx < \infty,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant r < \infty$, причем $1/q = 1/r + 1/p - 1$. Тогда оператор K ограничен из $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$, где

$$\beta = (\alpha + n)\frac{q}{p} - n.$$

Также рассмотрен частный случай, когда функция $k(x,y)$ инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$.

Далее, будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname*{esssup}_{|x|<1/N \cup |x|>N} |a(x)| = 0.$$

Получены условия на ядро $k(x,y)$ при которых оператор $a(x)K$ является компактным оператором, действующий из $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Арабаджян Л. Г., Хачатрян С. А. (Ереван)
arabajyan@mail.ru

РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Для решения интегрального уравнения Винера-Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad x \in R^+ \equiv (0, +\infty), \tag{1}$$

относительно f, в работе [1] был предложен метод, основанный на разложении интегрального оператора. Записав уравнение (1)в операторной форме: $(\mathcal{J} - \mathcal{K})f = g$, где $\mathcal{K}$ – интегральный оператор Винера-Хопфа, а $\mathcal{J}$ - единичный оператор, и разложив $\mathcal{J} - \mathcal{K}$ в виде

$$\mathcal{J} - \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{J} - \mathcal{V}_+), \tag{2}$$

где $\mathcal{V}_\pm$ – вольтерровы операторы вида

$$(\mathcal{V}_+\varphi)(x) = \int\limits_0^x V_+(x-t)\varphi(t)dt, \quad (\mathcal{V}_-\varphi)(x) = \int\limits_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)dt \tag{3}$$

можно убедится, что для решения (1) достаточно последовательно решить два уравнения вольтеррова типа. Для построения факторизации (2) в [1] была выведена и изучена нелинейная система (уравнений Енгибаряна) относительно ядер $V_\pm$ операторов (3):

$$V_\pm(x) = K_\pm(x) + \int\limits_0^\infty V_\mp(t)\cdot V_\pm(t+x)dt, x \in R^+, K_\pm = K(\pm x). \tag{4}$$

На оновании результатов этой работы, в [2] доказана разрешимость уравнения (1) при $g \in L_1(R^+)$, в особом случае

$$0 \le K \in L_1(R), \qquad \mu \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$$

.

Доклад посвящен разрешимости системы (4) и построению факторизации (2), а также применению (2) для построения решений уравнения (1) в случае, когда ядро K – не симметричная функция, удовлетворяющая условиям: $\mu > 1$ и

$$K_\pm \in C^{(3)}(R^+), \quad (-1)^n \cdot K_\pm^{(n)}(x) \ge 0, \quad x \in R^+, n = 1,2,3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Енгибарян Н. Б., Арутунян А. А.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения. Матем. сборник. 1975. Т. 97, N 6. С. 35-58.

2. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Мат.анализ. 1984. Т. 22. Итоги науки и техн. ВИНИТИ , Москва. С. 175-244.

А.О. Бабаян, С.О. Абелян (Ереван, Армения)
barmenak@gmail.com, seyran.abelyan@gmail.com

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть $D = \{z = x+iy : |z| = r < 1\}$, а $\Gamma = \partial D$. В области D рассмотрим правильно эллиптическое уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^k}{\partial \bar z^k}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{3-k}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^3 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{5}$$

Здесь $\mu\nu \ne 0$, $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, а число k может принимать значения $1,2,3$. Следует определить решение уравнения (5) из класса $C^6(D)\bigcap C^{(2,\alpha)}(\bar D)$, которое удовлетворяет на Γ условиям Дирихле:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y), \quad k = 0,1,2, \ (x,y) \in \Gamma. \tag{6}$$

Задача (5), (6) фредгольмова (см.[1]). В работе [2] было показано, как эффективно вычислять дефектные числа этой задачи, а именно, количество линейно независимых решений однородной задачи и количество линейно независимых условий разрешимости неоднородной задачи. Далее, в [3] было показано, что в некоторых случаях, для уравнения четвертого порядка, формулы, полученные в [2], можно уточнить. Целью настоящей работы является исследование уравнения шестого порядка (5). Случай $k = 0$ был рассмотрен ранее (см.[4]).

В работе доказывается, что при $k = 3$ задача (5), (6) однозначно разрешима. При $k = 1,2$, в зависимости от значений μ, ν, эта задача однозначно разрешимой может и не быть. В этом случае в явном виде определяются дефектные числа задачи (5), (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields.- World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore, N.-J., London, Hong-Kong, 1998.

2. *Бабаян А. О.* О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге. // Известия НАН Армении. Математика, 2003, т.38, N6, стр. 39-48.

3. *Бабаян А. О.* Задача Дирихле для уравнения в частных производных четвертого порядка в случае двукратных корней характеристического уравнения.// Mathemaica Montisnigri, 2015, V.32, pp. 66-80.

4. *Бабаян А. О.* О дефектных числах задачи Дирихле в случае кратных корней.// "Вестник"Сб. науч.-метод. работ, т.1, Ереван, 2015, стр. 6-12

А. Г. Барсегян (Ереван, Армеия)
anibarseghyan@mail.ru

О ФАКТОРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЯДРА КОТОРЫХ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕНИ (-1)

Рассматривается следующее интегральное уравнение, ядро которого является однородной функцией степени (-1)

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}f(t)dt\,. \tag{1}$$

Наиболее известным уравнением вида (1) является уравнение А. Диксона. Уравнение (1) ранее было изучено путем его сведения к уравнению Винера-Хопфа. В настоящей работе развивается прямой факторизационный подход к уравнению (1), позволяющий получить ряд новых результатов.

Предполагается, что ядро уравнения (1) обладает свойством

$$\mu = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}|P(x)|dx < +\infty\,.$$

С применением метода нелинейных уравнений факторизации (НУФ) Н. Б. Енгибаряна строится треугольная (формально вольтерровая) факторизация:

$$\left(I - \hat{P}\right) = \left(I - \hat{V}^-\right)\left(I - \hat{V}^+\right),$$

где

$$\left(\hat{V}^+ f\right)(x) = \int_x^1 V^+\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}f(t)dt, \qquad \left(\hat{V}^- f\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x V^-\left(\frac{t}{x}\right)f(t)dt.$$

Факторизация применяется к уравнению (1) с положительным симметричным ядром, в консервативном случае $\mu = 1$. Показывается, что тогда положительными решениями одновременно могут обладать как однородное уравнение, так и – неоднородное уравнение с $g(x) \geq 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A246.

А. В. Братищев (ДГТУ, Россия)
avbratishchev@spark-mail.ru

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Пусть закон изменения состояний динамической системой описывается автономной системой n-ого порядка

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad\qquad \ldots. \\ x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Потребуем, чтобы агрегированные переменные $\psi_1(x_1, ..., x_n), ...,$
$\psi_m(x_1, ..., x_n)$ на траекториях синтезируемого регулятора удовлетворяли дифференциальным уравнениям вида

$$\psi_{1t}' = g_1(\psi_1), ..., \psi_{mt}' = g_m(\psi_m), \quad \text{где} \quad g_1(0) = ... = g_m(0) = 0,$$

а нулевые положения равновесия этих уравнений были устойчивы в целом. Разрешим линейную систему

$$\begin{cases} \psi_{1x_1}'x_1' + ... + \psi_{1x_n}'x_n' = g_1(\psi_1(x_1, ..., x_n)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ \psi_{mx_1}'x_1' + ... + \psi_{mx_n}'x_n' = g_m(\psi_m(x_1, ..., x_n)). \end{cases}$$

относительно каких-либо m производных, а остальные производные x_k' заменим на соответствующие функции f_k. Добавляя к полученным уравнениям $n - m$ уравнений исходной системы, получаем уравнение синергетического регулятора.

ТЕОРЕМА *Положение равновесия* $(x_1^0, ..., x_n^0)$ *регулятора является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} \psi_1 = 0, ..., \ \psi_m = 0, \\ f_{s_1} = 0, ..., \ f_{s_{n-m}} = 0 \end{cases},$$

а хактеристический многочлен для этого положения равновесия вычисляется по формуле

$$\left(x - g_1'(\psi_1(x_1^0, ..., x_n^0))\right) ... \left(x - g_m'(\psi_m(x_1^0, ..., x_n^0))\right)$$
$$\times \frac{1}{\delta_{s_1 \dots s_{n-m}}} \begin{vmatrix} x - f'_{1x_1} \dots -f'_{1_{s_k}} \dots -f'_{1x_n} \\ \dots \dots \dots \\ \psi'_{sx_1} \dots \psi'_{sx_{s_k}} \dots \psi'_{sx_n} \\ \dots \dots \dots \\ -f'_{nx_1} \dots -f'_{nx_{s_k}} \dots x - f'_{nx_n} \end{vmatrix}.$$

B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov (Rostov-on-Don, Russia)
bvak1961@bk.ru, yu.e.drobotov@yandex.ru

ON CONDITIONS FOR BOUNDEDNESS OF THE RIESZ POTENTIAL TYPE OPERATOR FROM L^p TO $H^{\omega(\cdot)}$ ON $\dot{\mathbb{R}}^n$

An actual problem is to investigate conditions for smoothness of potential type operators to be caused by integrability of respectful preimages. One of the ways to determine the smoothness property is using the terms of the generalized Hölder spaces.

Functional spaces to be considered here is the well known L^p space and the generalized variable Hölder space $H^{\omega(\cdot)}$, determined with the following norm:

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)} = \|f\|_{C(\Omega,w)} + \sup_{x\in\Omega, t>0} \frac{M_r(wf,x,t)}{\omega(x,t)},$$

where $\Omega \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$, w is a weight function, C is the notion for the space of continuous functions and the local continuity modulus is

$$M_r(f,x,t) = \sup_{y\in\Omega: r(x,y)\le t} |f(x) - f(y)|,$$

where r is the notion for a metric. Hereinafter $|x-y|$ is the notion for the Euclidean distance and $\dot{\mathbb{R}}^n$ denotes the one-point compactification of $\mathbb{R}^n$.

The problem was studied earlier for the Riesz potential type operator of a constant order and Ω being a unit sphere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. The present study is to deal with the variable order potential type operator

$$\left(I_{c_0}^{\alpha(\cdot)} f\right)(x) = \int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^n} \frac{c_0(x,\sigma) f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-\alpha(x)}} d\sigma$$

and to provide conditions for $I_{c_0}^{\alpha(\cdot)}$ to be bounded from L^p to $H^{\omega(\cdot)}(w_0)$, where w_0 is the weight function due to stereographic projecting. It is based inter alia on an approach, applied in [1] for the constant order potential type operator in the generalized Hölder spaces.

R E F E R E N C E S

1. *Samko S. G., Vakulov B. G.* On equivalent norms in fractional order functions spaces of continuous functions on the unit sphere. // Fract. Calculus and Appl. Analysis 2000. T. 4, Vol. 3. P. 401–433.

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков (Донецк)
valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССА ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ВЗВЕШЕННОМУ УСЛОВИЮ МОРЕРЫ

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и G – группа конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$. Пусть также $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$. Как обычно, символом $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ обозначается класс функций, локально суммируемых в $\mathbb{D}$. Для $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ и $R \in [0,1)$ положим $M_R(f) = \int\limits_{|z|\le R} |f(z)|\,(1-|z|)^{-3/2}\,dm(z)$, где $dm(z)$ – мера Лебега на плоскости $\mathbb{C}$. Пусть также $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ – множество функций, голоморфных в $\mathbb{D}$.

Теорема 1. *Пусть $\varrho \in (0,1)$ фиксировано. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ и*

$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(gz)\,dz = 0 \tag{1}$$

для почти всех $g \in G$ по мере Хаара. Пусть также $\varliminf\limits_{R\to 1} \frac{M_R(f-h)}{|\ln(1-R)|} = 0$ для некоторой функции $h \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$. Тогда $f = h$ п.в. в $\mathbb{D}$.

(ii) *Для любой функции $h \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ существует неголоморфная веще-ственно-аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f, для которой условие (1) выполнено при всех $g \in G$ и $\frac{M_R(f-h)}{|\ln(1-R)|} = O(1)$ при $R \to 1$.*

Отметим, что до настоящего времени почти ничего не было известно о свойствах решений уравнения (1). Исключением является теорема о двух радиусах, установленная Беренстейном и Паскуасом в работе [1]. Доказательство теоремы 1 основано на развитии методов, предложенных авторами в [2]. Относительно других теорем типа Мореры см. [3] и имеющуюся там библиографию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berenstein C. A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk // Israel J. Math. 1994. V. 86. P. 61–106.

2. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London:Springer, 2009.

3. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel:Birkhäuser, 2013.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть

$$G_{\overline{\lambda}} = m^2 I + \Delta - \sum_{k=1}^{l} i\lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0 \tag{1}$$

обобщенный оператор Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_k < 1$, $1 \le l \le n$. Комплексные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{G_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(m^2 - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \xi_k^2\right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(x), \tag{2}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$ с нестандартной метрикой.

На функциях $\varphi(x) \in L_p$ отрицательные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ понимаются как потенциалы $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$.

Показана ограниченность оператора $B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в $L_p + L_s$ при $1 \le p < \frac{2n-l}{n+\operatorname{Re}\alpha-l-1}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{2n-l}{n-\operatorname{Re}\alpha+1} < q < \infty$ в случае $l < n$ и из L_p в L_p при $1 \le p \le \infty$ в случае $l = n$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $B_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $B_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

Н. Б. Енгибарян (Ереван, Армеия)
yengib@instmath.sci.am

МЕТОДЫ ОПЕРАТОРНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ

Факторизация Винера-Хопфа привела к широкому применению методов комплексного анализа к интегральным и дискретным уравнениям свертки (УС). Некоторые концепции и результаты в данном направлении относятся к непреходящим ценностям экзистенциальной теории УС. Важные работы по конструктивному решению УС методами комплексного анализа выполнены Д. Гаховым, его учениками и последователями.

Имеются определенные трудности, ограничивающие возможности методов гармонического анализа в вопросах теории и решения УС.

В работах автора и его соавторов развиты прямые операторные методы к уравнениям свертки, в которых широко применяется треугольная факторизация исходного уравнения, без перехода к символу уравнения (возможно, с использованием некоторых свойств символа). Эти методы исходят из принципа инвариантности Амбарцумяна и метода Винера-Хопфа. Основные из них следующие:

- Метод нелинейных уравнений факторизации;
- Факторизационная трактовка нелинейного уравнения Амбарцумяна и его обобщений. Математически обоснованная, близкая к оптимальному, версия метода дискретных ординат Чандрасекара;
- Метод полуобратной факторизации;
- Метод двустороннего продолжения решения УС на конечном промежутке;
- Метод усреднения ядра приближенного решения УС, с количественной оценкой погрешности;
- Преобразование некоторых классов уравнений Винера-Хопфа к уравнениям со сжимающим оператором.

Настоящий обзор посвящен сравнительному анализу теоретических и прикладных аспектов применения вышеупомянутых методов к следующим классам неособых и особых уравнений свертки:

- Скалялярные и векторные уравнения Винера-Хопфа;
- Скалярные и векторные уравнения восстановления на полупрямой и всей прямой;
- Скалярные и векторные парные уравнения и уравнения с двумя ядрами;
- Уравнения с разностными и суммарно-разностными ядрами на конечном промежутке.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A246.

Захарян В. С., Даллакян Р. В. (Ереван, Армения)
mathdep@seua.am dallakyan57@mail.ru

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ $B_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ НЕКОТОРЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ КЛАССАМ

Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана - Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс Р. Неванлинны мероморфных в единичном круге функций, вводя в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения, которые в специальном случае $\alpha=0$ превращаются в произведение Бляшке.

Пусть $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$. Класс D^p_α определяется как множество тех аналитических в единичном круге функций для которых

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha|f'(re^{i\phi})|^p r d\phi dr<+\infty.$$

Если $\alpha+1<p$, то эти классы называются классами аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом типа Дирихле.

В работе доказывается, что при $-1<\alpha<0$ произведения B_α принадлежат классу $D^2_{1+\alpha}$. Далее доказывается, что бесконечное произведение $B_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ не может принадлежать классу D^2_0. Следовательно не может принадлежать также классу H^1 Харди. Далее, используя эти утверждения, доказываются некоторые предложения о граничном поведении произведений $B_\alpha(-1<\alpha<0)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государствен- ного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Изд. "Наука Москва, 1966.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* О факторизации функций B_α. // Мат. заметки, 1968. т.4, N1, стр. 3-10.
3. *Захарян В. С.* Об одной оценке для произведения М. М. Джрбашяна. Изв. АН Арм. ССР, Математика, XXIII, N2.

О. А. Иванова (Ростов-на-Дону, Россия)
ivolga@sfedu.ru
С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
melih@math.rsu.ru

О ДИНАМИКЕ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ВЛЕВО

Зафиксируем целую (в $\mathbb{C}$) функцию g_0 такую, что $g_0(0)=1$, и введем оператор обобщенного сдвига влево (оператор Поммье)

$$D_{0,g_0}(f)(t):=\begin{cases}\frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t\ne 0,\\ f'(0)-g_0'(0)f(0), & t=0,\end{cases}$$

f — целая функция. Если $g_0\equiv 1$, то D_{0,g_0} — оператор сдвига влево последовательности тейлоровских коэффициентов функции f. Рассматривается оператор D_{0,g_0}, действующий (линейно и непрерывно) в некотором счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций. В докладе идет речь о следующих задачах, связанных с динамикой оператора D_{0,g_0}:
1) Описаны циклические вектора и собственные замкнутые D_{0,g_0}-инва-риантные подпространства E.
2) Исследована алгебра, образованная топологическим сопряженным E' к E, с умножением $\otimes$, задаваемым оператором сдвига для D_{0,g_0}. В частности, описаны собственные замкнутые идеалы в алгебре $(E',\otimes)$.

А. С. Калитвин, А. И. Иноземцев (Липецк, Россия)
kalitvinas@mail.ru inozemcev.a.i@gmail.com

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В пространстве непрерывных функций $C(G)$, где $G=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, рассматривается фредгольмовость уравнения

$$x(t,s,u)=\int_a^b m(t,s,u,\tau)x(\tau,s,u)d\tau+\int_a^b\int_c^d n(t,s,u,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma,u)d\tau d\sigma+$$

$$+f(t,s,u) \equiv (Kx)(t,s,u) + f(t,s,u) \equiv ((M+N)x)(t,s,u) + f(t,s,u) \quad (1)$$

с непрерывными заданными функциями m, n, f. Операторы K, M, N в этом уравнении не являются компактными, поэтому уравнение (1) в общем случае непрерывных ядер не является фредгольмовым. Критерии фредгольмовости уравнений с частными интегралами в $C([a,b]\times[c,d])$ содержатся в [1]. Приводимый ниже критерий показывает существенное отличие изучаемого в работе уравнения от линейных уравнений, рассмотренных в [1].

При каждом фиксированном u уравнение (1) есть частный случай изученных в [1] уравнений, фредгольмовость которых равносильна обратимости оператора $I-M$ в $C([a,b]\times[c,d])$, которая в свою очередь эквивалентна обратимости оператора $I-M$ в $C(G)$. Записывая уравнение (1) в виде $(I-M)x = Nx+f$ и применяя к обеим частям последнего уравнения оператор $(I-M)^{-1} = I+R_M$, где R_M — частично интегральный оператор типа оператора M с непрерывным ядром, получим уравнение $x = (N+R_MN)x + (N+R_MN)f$. Так же, как в [1], фредгольмовость последнего уравнения равносильна обратимости оператора $I-(N+R_MN)$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Интегральное уравнение (1) фредгольмово в $C(G)$ точно тогда, когда оно обратимо в $C(G)$.*

Теорема имеет место, если в (1) $m \in C_G(L^1([a,b]))$, $n \in C_G(L^1([a,b]\times[c,d]))$, $f \in C(G)$; здесь $C_G(L^1([a,b]))$ и $C_G(L^1([a,b]\times[c,d]))$ — пространства непрерывных вектор-функций на G со значениями $L^1([a,b])$ и $L^1([a,b]\times[c,d])$ соответственно. При этом действующие в $C(G)$ операторы $I-M$ и $I-(N+R_MN)$ обратимы.

R E F E R E N C E S

1. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк, 2006.

G. A. Karapetyan (Yerevan, Armenia)
Garnik_Karapetyan@yahoo.com

INTEGRAL REPRESENTATION OF FUNCTIONS AND EMBEDDING THEOREMS FOR GENERAL MULTIANISOTROPIC SPACES

Introduction. This paper is a continuation of [1]-[2], in which we proved embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane. In current paper an integral representation of functions and embedding theorems were proven for the n-dimensional multianisotropic spaces with one points of anistropicity. The paper generalizes the known embedding theorems for isotropic and anisotropic spaces. For the history of the problem see [3].

For any parameter $\nu > 0$ and a natural number k denote

$$P(\nu,\xi) = \left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \cdots + \left(\nu\xi^{\alpha^n}\right)^{2k} + \left(\nu\xi^{\alpha^{n+1}}\right)^{2k}.$$

$$G_0(\nu;\xi) = e^{-P(\nu,\xi)}.$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, (j=1,\ldots,n+1).$$

For any function f consider the regularization with the kernel $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

The following integral representation holds:

Theorem 1. *Let the function f have the Sobolev weak derivatives $D^{\alpha^i}f$, $(i=1,\ldots,n+1)$, where α^i are the vertices of the completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$ and $D^{\alpha^i}f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, $(i=1,\ldots,n+1)$. Then for almost all $x \in R^n$ it has the representation*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\varepsilon}^{h} d\nu \int\limits_{R^n} D^{\alpha^i}f(t)\hat{G}_{1,i}(t-x,\nu)dt.$$

Let $\mathfrak{N}$ be a completely regular polyhedron, then

$$W_p^{\mathfrak{N}}(R^n) = \{f : f\in L_p(R^n), D^{\alpha^i}f \in L_p(R^n), i=1,\ldots,n+1\}$$

is called a multianisotropic Sobolev space.

Let us prove the embedding theorems for $W_p^{\mathfrak{N}}$.

Theorem 2. *Let $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-j} \le \alpha_{n-j+1} \le \cdots \le \alpha_n$, $1 \le p \le \infty$ or $1 \le p < \infty$ and $q = \infty$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ be a multi-index. Denote*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\left|\mu^i\right| + \left(m,\mu^i\right)\right) - \min_{i=1,\ldots,k}\left|\mu^i\right|\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

If $\chi < 1$, then $D^m W_p^{\mathfrak{N}}(R^n) \hookrightarrow L_q(R^n)$ and the following inequality holds

$$\|D^m f\|_{L_q R^n} \leq h^{1-\chi}\left(a_{k+l}|\ln h|^{k+l} + \cdots + a_0\right)\sum_{i=1}^{n+1}\left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(R^n)} +$$

$$+h^{-\chi}\left(b_{k+l}|\ln h\ |^{k+l} + \cdots + b_0\right)\|f\|_{L_p(R^n)},$$

where k, $(k \leq j)$ is the number of multi-index α and l is the number of inequalities between the coordinates of the vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

R E F E R E N C E S

1. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane with one vertex of anisotropicity. // Proceedings of NAS RA - Mathematics, 2016 (in press).

2. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane. // Proceedings of NAS RA - Mathematics, 2016 (in press).

3. *Besov O. V., Il'in V. P., Nikloskii S. M.* Integral representations of functions and embedding theorems. // Nauka, Moscow, 1975 (in Russian), p. 480.

A.N.Karapetyants, (Rostov-on-Don, Russia), S.G.Samko (Faro, Portugal)
karapetyants@gmail.com

ON A CERTAIN NEW CLASSES OF BERGMAN TYPE SPACES

The aim of talk is twofold. First, we present a new general approach to the definition of mixed norm Bergman space $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, $1 \leqslant q < \infty$ on the unit disc $\mathbb{D}$. We study a problem of boundedness of Bergman projection in this general setting. Second, we apply this general approach for the new concrete cases when $X(I)$ is either generalized Morrey space, or generalized complementary Morrey space, or Orlich space.

Е. А. Клешкова (Красноярск, Россия)
ekleshkova@gmail.com

О ГИПЕРГРАНЯХ МНОГОГРАННИКА НЬЮТОНА ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$P_i := \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, переменными коэффициентами $a_\lambda^{(i)}$, $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ – фиксированные конечные подмножества, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \ldots y_n^{\lambda_n}$. Будем считать, что все $A^{(i)}$ содержат нулевой элемент $\bar{0}$. Решение $y(a) = (y_1(a), \ldots, y_n(a))$ системы (1) обладает свойством полиоднородности, поэтому она, как правило, допускает приведение с помощью мономиальных преобразований коэффициентов $F : a \mapsto x$ (см. [1]). Для этого необходимо выделить набор показателей $\omega^{(i)} \in A^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, со свойством $\det\left(\omega_j^{(i)}\right) \neq 0$. В результате получим *приведенную систему* вида

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где матрица вида $\omega = (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$ невырожденная, а матрица $\Lambda^{(i)} := A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$.

Наша задача – найти нормальные векторы граней максимальной размерности (гиперграней) многогранника Ньютона дискриминанта системы (2).

Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)} \cup \mathbb{Z}^n_{\geq}$, и запишем его в виде матрицы $\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(n)}) = (\lambda^1, \ldots, \lambda^N)$, здесь N– количество коэффициентов в системе (2). Строки полученной матрицы Λ обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 1. *Векторы*

$$\varkappa_1 = (-1, 0, \ldots, 0), \ldots, \ \ \varkappa_N = (0, 0, \ldots, -1), \ \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

являются нормальными к многограннику Ньютона дискриминанта системы (2).

R E F E R E N C E S

1. *Антипова И. А., Цих А. К.* Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 29–56.

А. В. Комлов (Москва, Россия)
komlov@mi.ras.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА-ПАДЕ 1-ГО РОДА

В докладе мы рассмотрим классическую проблему восстановления значений многозначных аналитических функций по заданному ростку. Точнее, пусть f — 3-значная алгебраическая функция, и нам задан некоторый росток f_∞ функции f в ∞. Каким образом и на каком множестве можно восстановить значения функции f?

Рассмотрим аппроксимации Паде $-P_{n,0}/P_{n,1}$ функции f, построенные по ростку f_∞. Здесь $P_{n,0}, P_{n,1}$ — полиномы Паде, определяемые соотношением $P_{n,0}(z) + P_{n,1}(z)f_\infty(z) = O(z^{-n-1})$, $z \to \infty$ ($\deg P_{n,j} \leqslant n$). Как показал Г. Шталь (1986),

$$-P_{n,0}(z)/P_{n,1}(z) \to f_\infty(z), z \in \mathbb{C} \setminus S,$$

где S — компакт минимальной емкости, содержащий все "активные" ("видимые ростку f_∞") точки ветвления f, при этом исходный росток $f_\infty(z)$ продолжается в $\mathbb{C} \setminus S$ как однозначная голоморфная функция. Тем самым аппроксимации Паде восстанавливают значения многозначной функции f на так называемом "первом листе". Как восстановить значения f на каком-нибудь другом листе?

Для этого рассмотрим следующее обобщение полиномов Паде: полиномы Эрмита-Паде 1-го рода, построенные по тройке $[1, f_\infty, f_\infty^2]$. Это полиномы $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2}$ (степени не выше n), определяемые соотношением $Q_{n,0}(z) + Q_{n,1}(z)f_\infty(z) + Q_{n,2}(z)f_\infty^2(z) = O(z^{-2n-1})$. Используя оригинальный подход Дж. Наттолла (1984), мы показываем, что

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \to -\{f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})\}, \quad \frac{Q_{n,0}}{Q_{n,2}}(z) \to f(z^{(1)})f(z^{(2)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где F — некоторый компакт, а $f(z^{(1)}), f(z^{(2)})$ — значения f на "первом" и "втором" листах. Тем самым аппроксимации Шафера S_n, определяемые соотношением $Q_{n,2}(z)S_n^2(z) + Q_{n,1}(z)S_n(z) + Q_{n,0}(z) = 0$, восстанавливают значения f на двух листах.

Более того, при некоторых ограничениях на f мы находим предельное распределение нулей полиномов $Q_{n,j}$ и точек интерполяции.

Это совместная работа с Н. Г. Кружилиным, Р. В. Пальвелевым и С. П. Суетиным.

V. P. Krivokolesko (Krasnoyarsk, Russia)
krivokolesko@gmail.com

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПО ОСТОВУ ЕДИНИЧНОГО ПОЛИЦИЛИНДРА В $\mathbb{C}^n$

Интегральное представление [1] содержит интегралы вида

$$\int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{\prod\limits_{j=1}^{M} (a_{j,1}(\zeta)z_1\xi_1 + \ldots + a_{j,n}(\zeta)z_n\xi_n + c_j(\zeta))^{-t_j}}{(2\pi i)^n \cdot \xi_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{s_n}} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n},$$

где $(z_1, \ldots, z_n) \in G \subset \mathbb{C}^n$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \partial G$ и G ограниченная n-круговая линейно выпуклая область с кусочно-регулярной границей ∂G, причем плоскости

$$a_{j,1}(\zeta)z_1 + \ldots + a_{j,n}(\zeta)z_n + c_j(\zeta) = 0, \quad j = 1, \ldots M,$$

проходят через точку $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \partial G$ и не пересекают область $G \subset \mathbb{C}^n$.

Предложен алгоритм нахождения интегралов такого типа. Приведены примеры расчета таких интегралов.

R E F E R E N C E S

1. *Krivokolecko V. P* Integral representations for linearly convex polyhedra and some combinatorial identities.// J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **2**(2009), no. 2, 176–188 (in Russian).

N. G. Kruzhilin (Moscow, Russia)
kruzhil@mi.ras.ru

MILNOR ALGEBRAS OF ISOLATED SINGULARITIES: RECONSTRUCTION PROBLEM AND ASSOCIATED FORMS

By the Mather–Yau theorem an isolated complex hypersurface singularity is determined by its Tjurina algebra up to a biholomorphism. Some approaches to recovering a hypersurface singularity from its Tjurina or Milnor algebra are discussed. The main emphasis is put on the case of homogeneous singularities.

With each homogeneous d-form f on $\mathbb{C}^n$ with discriminant distinct from zero we can associate a certain $n(d-2)$-form $\mathbf{f}$, which is defined in terms of the Milnor algebra of the singularity of the zero set of f. There is a conjecture that f can be recovered from $\mathbf{f}$ in the following sense: every invariant of the form f is given by the value at $\mathbf{f}$ of an appropriate GL_n-invariant function on the space of $n(d-2)$-forms.

In the simplest nontrivial cases when $n = 2$, $d = 4$ or $n = 3$, $d = 3$ the morphism taking forms to their associated forms can be described explicitly and the reconstruction problem has a transparent solution.

V. D. Kryakvin (Rostov-na-Donu, Russia)
kryakvin@sfedu.ru

PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS IN HÖLDER-ZYGMUND SPACES OF A VARIABLE SMOOTHNESS

We say that a infinitely differentiable function a belongs to the class $S^{m(\cdot)}_{1,\delta} = S^{m(\cdot)}_{1,\delta}(\mathbb{R}^{2n})$, $0 \le \delta \le 1$, of variable order $m(\cdot)$ if

$$|a|^{m(\cdot),\delta}_{N_1,N_2} := \sum_{|\beta|\le N_1, |\alpha|\le N_2} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|-\delta|\beta|-m(x)} < \infty$$

for all $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$. It is assumed that the function m is infinitely differentiable and bounded on $\mathbb{R}^n$.

As usual, the symbol $a(x,\xi) \in S^{m(\cdot)}_{1,\delta}$ is associated with the pseudodifferential operator $A = a(x,D)$ by the formula

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{i(x-y)\xi}\, dy d\xi, \quad u \in S(\mathbb{R}^n).$$

Let a function s is bounded and satisfies for $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < |y| < 1$

$$|s(x+y) - s(x)| \le \frac{S_1}{\big|\log_2 |y|\big|}.$$

A distribution $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ belongs to Hölder-Zygmund space $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ with variable smoothness s, if

$$\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \|2^{ks(x)} \lambda_k(D) u(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_x)} < \infty.$$

The main result is the following. It clarifies pseudolocal property of pseudodifferential operators.

Theorem 1. *The pseudodifferential operator $a(x,D)$ with symbol $a \in S^{m(\cdot)}_{1,\delta}$, $0 \le \delta < 1$, is bounded from $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ to $\Lambda^{(s-m)(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. There exist constants $C > 0$, $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$ such that for any operator $a(x,D)$*

$$\|a(x,D)\| \le C|a|^{m(\cdot),\delta}_{N_1,N_2}.$$

R E F E R E N C E S

1. *Kryakvin V. D.* Boundedness of pseudodifferential operators in Holder-Zygmund spaces of variable order. // Siberian Mathematical Journal. 2014. 55, No. 6, p. 1073–1083.

В. И. Кузоватов (Красноярск)
kuzovatov@yandex.ru

ОБ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ПЛАНА[1]

Данная работа посвящена получению аналога формулы План, которая имеет существенное значение в получении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана.

Пусть $G(w)$ – рациональная функция, представимая степенным рядом $G(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{q_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n w^n$, коэффициенты которого f_n принимают значение либо 1, либо 0.

По теореме Сеге функция $G(w)$ представима в виде $G(w) = \frac{P(w)}{1-w^N}$, где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое целое неотрицательное число. Пусть $\deg P(w) = N$ и $w_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть для показателей q_n мономов степенного ряда выполнено условие $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} > 0$. $F(y)$ получается из $G(w)$ заменой $w = e^{-2\pi y}$.

Теорема 1. *Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная и ограниченная на множестве $\{x_1 \le$*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-00277, 16-31-00173).

$\operatorname{Re} z \le x_2\}$. *Тогда*

$$\frac{P(w_0)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\varphi(x_2)\right)+\frac{P(w_1)}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{1}{N}\big)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\varphi\big(x_2-1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{1}{N}\big)\right)+\ldots+$$
$$+\frac{P(w_{N-1})}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{N-1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{N-1}{N}\big)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\varphi\big(x_2-1-\frac{N-1}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{N-1}{N}\big)\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+$$
$$+\frac{1}{i}\int\limits_0^\infty\big[\varphi(x_1-iy)F(y)+\varphi(x_1+iy)(1+F(-y))\big]dy-$$
$$-\frac{1}{i}\int\limits_0^\infty\big[\varphi(x_2-iy)F(y)+\varphi(x_2+iy)(1+F(-y))\big]dy.$$

В. Р. Куликов (Красноярск, Сибирский федеральный университет)
v.r.kulikov@mail.ru

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА-БАРНСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

Г. Меллин в 1921 году привел интеграл Меллина-Барнса, представляющий решение $y(x)$ приведенного алгебраического уравнения вида

$$y^n+x_1y^{n-1}+\ldots+x_{n-1}y-1=0.$$

Этот интеграл имеет непустую область сходимости, она определяется условиями на аргументы $\theta_j=\arg x_j$. Полная область сходимости такого интеграла была получена сравнительно недавно в статье И.А. Антиповой [3]

В настоящей статье речь идет об аналогичных исследованиях в многомерной ситуации. Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида

$$y_j^{m_j}+\sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}x_\lambda^{(j)}y^\lambda-1=0,\ j=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $\Lambda^{(j)}\subset\mathbb{Z}^n$. Также введем обозначение $\Lambda:=\bigsqcup\limits_{j=1}^n\Lambda^{(j)}$ для дизъюнктной суммы множеств $\Lambda^{(j)}$. Мощность множества Λ обозначим N. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторерк пространство $\mathbb{C}^\lambda\cong\mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x=(x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda\in\Lambda$. Группу координат, соответствующую индексам $\lambda\in\Lambda^{(i)}$ мы, как правило, выделяем записью $x_\lambda^{(i)}$, при этом отождествляя $\mathbb{C}^\Lambda$ с пространством $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}}\times\ldots\times\mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$; иногда для элементов из $\mathbb{C}^{\Lambda^{(i)}}$ мы используем обозначение x_λ, $\lambda\in\Lambda^{(i)}$.

Множество Λ также будем трактовать как матрицу

$$\Lambda=\left(\Lambda^{(1)},\ldots,\Lambda^{(n)}\right)=\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^N\right),$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k=\left(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k\right)$ из показателей мономов системы (1). Здесь имеется ввиду, что блок $\Lambda^{(i)}$ матрицы Λ соответсвтует i-му уравнению системы (1), а нумерация столбцов λ^k внутри каждого из блоков $\Lambda^{(i)}$ произвольная, но фиксированная. Строки матрицы Λ мы обозначим φ_j, $j=1,...,n$. Нас будет интересовать ветвь решения $y(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$ системы (1) с условием $y(0)=(1,\ldots,1)$, которую назовем главным решением. Следуя работам [2], [4], моному $y^\mu=y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n}$ главного решения $y=y(x)$ данной системы поставим в соответствие интеграл Меллина-Барнса:

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N}\frac{\prod\limits_{j=1}^n\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^n\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)}Q(u)x^{-u}du, \tag{2}$$

[1]Автор поддержан грантом Правительства РФ для исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор № 14.Y26.31.0006

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\{u \in \mathbb{R}^N_{>0} : \langle \varphi_j, u\rangle < \mu_j, j = 1, ..., n\},$$

а $Q(u)$ — многочлен выражаемый определителем

$$Q(u) = \frac{1}{m_1 \dots m_n} \det \left\| \delta_i^j \left(\mu_j - \langle \varphi_j, u\rangle\right) + \langle \varphi_j^{(i)}, u^{(i)}\rangle \right\|_{i,j=1}^n . \tag{3}$$

Интеграл (2) получается формальным вычислением преобразования Меллина для $y^\mu(x)$ с помощью замены (линеаризации).

Рассмотрим матрицы составленные из показателей мономов, входящих в систему (1) следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)} = \left(\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)}\right)^T$ пробегает соответствующее множество $\Lambda^{(j)}$.

Будем называть минор матрицы главным, если номера отмеченных строк совпадают с номерами отмеченных столбцов.

Теорема. *Интеграл* (2)*, соответствующий решению системы алгебраических уравнений* (1)*, имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда во всех матрицах вида* (4) *все главные миноры положительны.*

В доказательстве сформулированной теоремы используется результат Л. Нильсон, М. Пассаре и А.К. Циха (см. [1] или [5, раздел 4.4.1]) о множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса. Кроме того важную роль в доказательстве играет теорема о разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [6, с. 134]

Список литературы

[1] Nilsson L., *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions,* Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

[2] И. А. Антипова, *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды*, Сиб. матем. журн., **44**:5 (2003), 972–980

[3] И. А. Антипова, *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений*, Матем. сб., **198**:4 (2007), 3–20

[4] В. А. Степаненко, *О решении системы nn алгебраических уравнений от nn неизвестных с помощью гипергеометрических функций*, Вестн. Красноярск. гос. ун-та, 2003, № 1, 35–48

[5] Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. - М.: Наука, 2014. - 408 с.

[6] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – Новое изд., перераб. – М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.

Ю. Л. Кудряшов, Д. В. Третьяков (Симферополь, Российская Федерация)
dvttvd@mail.ru

О СЕМЕЙСТВАХ J-САМОСОПРЯЖЁННЫХ ДИЛАТАЦИЙ

Пусть A – плотно заданный линейный оператор с непустым множеством регулярных точек, например,$-i \in \rho(A)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В пространстве $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$, где $\mathfrak{D}_\pm$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками $J_\pm$, строится семейства J-самосопряжённых дилатаций ($J = J_- \oplus I \oplus J_+$) оператора A. Семейства порождены $J_\pm$-симметрическими, максимальными в пространствах $\mathfrak{D}_\pm$ операторами, $J_\pm$-метрики строятся по дефектным операторам исходного оператора A.

А. В. Лобода, В. И. Суковых(Воронеж, Россия)
lobvgasu@yandex.ru

О ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В $\mathbb{C}^3$

Пусть вещественно-аналитическая гиперповерхность M в $\mathbb{C}^3$ имеет нормальное уравнение Мозера ([1])

$$Im\, z_3 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k,l\geq 2, m\geq 0} N_{klm}(z, \bar{z})(Re\, z_3)^m \tag{1}$$

и удовлетворяет условию "общности положения" ([2])

$$N_{220} = E_3 + \mu E_0,\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $E_3 = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$, $E_0 = |z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4$.

В силу [3] однородную поверхность (1)-(2) однозначно определяют 16 вещественных коэффициентов из уравнения (1).

Теорема. *Голоморфно-однородная гиперповерхность (1)-(2), удовлетворяющая дополнительному условию $\mu = 0$, однозначно определяется шестеркой опорных коэффициентов многочлена N_{320} и одним коэффициентом многочлена N_{330} из уравнения (1).*

Предложение. *При условии вещественности всех шести опорных коэффициентов многочлена N_{320} однородная поверхность определяется только ими. Сами эти опорные коэффициенты удовлетворяют системе из пяти полиномиальных уравнений.*

Пример (Атанов). Трубка над аффинно-однородным основанием $x_1x_3 = x_2^2 - x_1^{8/5}$ в $\mathbb{R}^3$ имеет в уравнении вида (1) многочлен $N_{220} = E_3$ и вещественную опорную шестерку.

Следствие. *"Вблизи" поверхности Атанова существует не более чем однопараметрическое семейство однородных поверхностей с многочленом $N_{220} = E_3$ и вещественными опорными шестерками коэффициентов многочлена N_{320}.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133, N 3. P. 219-271.

2. *Лобода А. В.* Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения. // Матем. заметки. 2003. Т. 73, Vol. 3. С. 419–423.

3. *Лобода А. В., Суковых В. И.* Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей // Вестник ВГУ. Системный анализ. 2015. N 1. С. 14-22.

И. А. Лопатин (Красноярск, Российская Федерация)
alvamgen@gmail.com

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТРОПИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ [2]

Рассмотрим многолен

$$F(z) = \sum_{\alpha \in A \subset \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha \tag{1}$$

где коэффициенты c_α принадлежат полю $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ формальных дробностепенных рядов от переменной t. Пусть $\deg(u)$ — порядок обращения в ноль ряда $u \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$. Напомним, что тропическим полукольцом называется множество $R \cup \{\infty\}$ с двумя операциями: $x \oplus y = \min\{x, y\}$, $x \odot y = x + y$. Тропикализацией многочлена (1) называется следующее выражение:

$$F_T(x) = \bigoplus_{\alpha \in A \subset \mathbb{Z}^n} \deg(c_\alpha) x^{\odot\alpha} = \min_{\alpha \in A \subset \mathbb{Z}^n} (\deg(c_\alpha) + \langle \alpha, x \rangle) \tag{2}$$

Тропической гиперповерхностью называется множество таких $x \in \mathbb{R}^n$, что максимум в выражении (2) достигается как минимум дважды. Известно [1], что тропическая гиперповерхность, определяемая многочленом (2) совпадает со множеством

$$U = \{(\deg(u_1), \ldots, \deg(u_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(u_1, \ldots, u_n) = 0\} \tag{3}$$

В докладе на примерах будет описан способ сведения построения множества (3) к решению уравнения с одним неизвестным над полем $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, которое возможно по алгоритму Ньютона-Пьиюзо, который является конструктивным доказательством теоремы об алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. На примерах показано использование теоремы Южакова [2] о применении кратного логарифмического вычета к задаче обращения функций к построению множества (3).

R E F E R E N C E S

1. *Speyer D., Sturmfels B.* The tropical Grassmanian. // Adv. Geom., 2004. T. 66, Vol. 4. P. 389–411.

2. *Южаков А. П.* О примении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды. // Матем. сб., 1975. Т. 97(139), № 2(6), с. 177-192

А. Д. Мкртчян (Красноярск, Россия)
Alex0708@bk.ru

ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В СЕКТОРИАЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ ПУТЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим n-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_k f_k z^k. \tag{1}$$

[2]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006)

Следуя В. Иванову [1], введем следующее множество
$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln|\varphi(re^{i\theta})| \le \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\}$, неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$ при некоторой константе $C_{\nu.\theta}$. Обозначим

$$T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm\frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, ..., \theta_n),$$

$$M_\varphi := \{\nu \in [0,\pi]^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \quad \text{для любого} \ \ \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Пусть G секториальное множество вида

$$G = \bigcup_{\nu \in M_\varphi} G_\nu, \tag{2}$$

$$G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times ... \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n}) \text{ а } \Delta_\sigma - \text{сектор } \{z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C} : |\theta| \le \alpha\}.$$

Теорема *Сумма ряда* (1) *аналитически продолжается в секториальную область* G *вида* (2), *если найдется интерполирующая коэффициенты* f_k *целая функция* $\varphi(\zeta)$ *экспоненциального типа и вектор-функция* $\nu(\theta)$, *заданная на кубе* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ *и принимающая значения в* $M_\varphi(\theta)$, *для которых*

$$\nu_j(\theta) \le a|\sin\theta_j| + b\cos\theta_j, \ \ j = 1, ..., n,$$

с некоторыми константами $a \in [0,\pi)$, $b \in [0,\infty)$.

В доказательстве используется теория многомерных вычетов и принцип разделяющих циклов, позволяющий выразить интеграл мероморфной дифференциальной формы по остову полиэдра через сумму локальных вычетов внутри полиэдра [2].

R E F E R E N C E S

1. *Иванов В. К.* Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов // Мат. сборник, 1959, т.47(89), н.1.

2. *Tsikh A. K.* Multidimensional residues and their applications.// AMS. 103, Providence, 1992.

E. M. Muzalevskaya (Krasnoyarsk, Russia)
ekaterina-m09@mail.ru

COAMOEBA OF DISCRIMINANT FOR TETRANOMIALS

Coamoeba $\mathcal{A}'_V$ of an algebraic set $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ is defined as the image under projection Arg

$$\text{Arg } z = (\arg z_1, \ldots, \arg z_n)$$

to the real torus $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$.

We consider reduce algebraic equations of the following type

$$1 + x_l y^l + x_m y^m + y^n = 0.$$

Denote by $\Delta = \Delta(x_l, x_m)$ the discriminant of a such equation. Its discriminant set $\nabla = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \Delta(x) = 0\}$ admits follow parametrization [1]

$$x_l = -\frac{ns}{(n-l)s + n - m}\left(\frac{(n-l)s + n - m}{ls + m}\right)^{\frac{l}{n}}$$
$$x_m = -\frac{n}{(n-l)s + n - m}\left(\frac{(n-l)s + n - m}{ls + m}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Using this parametrization we describe the construction of the coamoeba $\mathcal{A}'_\nabla$ of the discriminant set ∇.

In the special case when $m = l + 1$ this construction was did in [2].

R E F E R E N C E S

1. *Passare M., Tsikh A. K.* Algebraic equations and hypergeometric series.// The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer-Verlag, Berlin, 2004. P. 653–672.

2. *Nilsson L., Passare M.* Discriminant coamoebas in dimension two.// Journal of Commutative Algebra, Volume 2, Number 4, Winter 2010. P 447–471.

Е. К. Мышкина (Красноярск)
elfifenok@mail.ru

ВЫЧЕТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-00277, 15-31-20008, 16-31-00173)

В работе [1] рассматривается система неалгебраических уравнений специального вида

$$f_i(z) = (z_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_{in})^{m_{in}} + Q_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, m_{ij} — натуральные числа, $Q_i(z)$ — целые функции a_{ij} — различные комплексные числа. Показано, что степенные суммы вычисляются с помощью вычетных интегралов, циклы интегрирования в которых зависят от вида системы. Получены формулы для вычисления степенных сумм. В качестве приложения найдены суммы некоторых двойных рядов, например.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}}{\sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{a_1 z_1 - a_2 z_2}{k^2\pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}}{\sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}} = \prod\limits_{s=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{-b_1 z_1 + b_2 z_2}{s^2\pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

На основе доказанного в статье получена

Теорема 1. *Справедливо интегральное представление*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{180 a_1 b_2} - \frac{\pi(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2})\zeta(3)}{2\sqrt{a_1 b_2}}$$

$$-\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi} - 1\right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u)\, dy -$$

$$-\sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \cdot \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi} - 1\right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, u)\, dy,$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x)$ *— базисный гипергеометрический ряд.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кытманов А. М., Мышкина Е. К.* О вычислении степенных сумм корней одного класса систем неалгебраических уравнений // Сибирские Электронные Математические Известия. 2015. Т. 12. С. 190–209.

Y. M. Naprienko[3] (Krasnoyarsk, Russia)
ya.naprienko@gmail.com

THE RESULTANT FOR CERTAIN TYPES OF ENTIRE FUNCTIONS

Theorem 1. *Let an entire function $g^k(z)$ and a polynomial $f(z)$ with roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ have next Taylor expansions:*

$$g^k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(k)} z^j = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + \cdots + b_n^{(k)} z^n + \ldots$$

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

Then we have the formula:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} g^k(\alpha_i) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_n^m} \begin{bmatrix} n b_0^{(k)} & b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & \ldots & b_m^{(k)} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ m a_{n-m} & a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

Theorem 2. *The resultant for an entire function $g(z)$ and a polynomial $f(z)$ is expressed by the entered sums in the following way:*

$$R(f, g) = \prod_{k=1}^{n} g(\alpha_k) = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ S_n & S_{n-1} & S_{n-2} & \ldots & S_1 \end{bmatrix},$$

Also we derived the factorization of an entire function of finite growth with finite amount of zeros that allows us to consider the function as a polynomial and an explicit determinantal formula for the nth power of the Taylor expansion of an entire function.

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-00173)

И. В. Оганисян (Ереван, Армения)
ishkhanh@gmail.com

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

Обобщая класс мероморфных в единичном круге функций ограниченного вида Р. Неванлинны, М. М. Джрбашян вводил в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ и произведения B_α, которые в специальном случае $\alpha=0$ превращаются в произведение Бляшке. Множество аналитических функций класса N_α обозначено через A_α, где $A\equiv A_0$- класс А. Островского.

Известны оценки тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ и произведений $B_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ и B в зависимости от плотности нулей, полученные С. Мергеляном, С. Степаняном, Д. Ньюманом , Н. Шапиро, Н. Вербицким и другими.

В работе эти оценки распространены для функций класса $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. Получены оценки для функций классов $A^*_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ - специальный подкласс ограниченных аналитических функций N_α. Получены также некоторые связи между распределением нулей и коэффициентами Тейлора произведений $B_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с. (гл. IX).

2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 224 с.

3. *Вербицкий Н. Э.* О коэффициентах Тейлора и L_p - модулях непрерывности призведений Бляшке. // Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 107, 1982, с. 27-35.

Н. А. Павлов (Владивосток, Россия)
npamcs@gmail.com

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА ГОЛОМОРФНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)|<1$ при $z\in U$. Точка z, $|z|=1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta)=z$. По лемме Жюлиа–Вольфа существование углового предела $f(z)$ в неподвижной граничной точке z влечет за собой существование угловой производной $f'(z)$ [1, с. 79–83]. В недавней статье [2, теорема 6] получена нижняя оценка $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$, зависящая от величины $\Phi(f(0))$. Здесь Φ есть дробно-линейный автоморфизм круга U, такой, что $\Phi(f(0))\in(0,1)$, $\Phi(e^{\pm i\theta})=e^{\pm i\theta}$. В данной работе устанавливается точное неравенство, включающее произведение $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$ и шварциан, вычисленный в точке $z=0$. Следующее утверждение получено методами теории потенциала [3].

Теорема 1. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f с неподвижными граничными точками $e^{\pm i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$ выполняется неравенство*

$$|S_f(0)|\le 6\left(1-\frac{|f'(0)|^2}{(1-|f(0)|^2)^2}\right)-3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})|-$$
$$-3\log\frac{1-\Phi^2(f(0))}{1-2\Phi(f(0))\cos\theta+\Phi^2(f(0))}.$$

Равенство достигается в случае тождественного отображения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-00022).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin: Springer, 1992. 299 P.

2. *Frolova A. Levenshtein M. Shoikhet D. Vasil'ev A.* Boundary distortion estimates for holomorphic maps. // Complex Analysis and Operator Theory. 2014. Vol. 8(5). P. 1129–1149.

3. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. Владивосток: Дальнаука, 2009. 401 С.

A. S. Peicheva (Krasnoyarsk, Russia)
peichevaas@mail.ru

ON A NON-COERCIVE STURM-LIOUVILLE PROBLEM FOR THE LAMÉ SYSTEM

Let D be a bounded domain with a Lipschitz boundary ∂D in $\mathbb{R}^3$. Let $S\in\partial D$ be an open (in the relative topology), connected set with a piece-wise smooth boundary ∂S and $Y\subset\overline{D}$ be a closed set on ∂S and ρ be a weight associated with it. Denote by $H^{s,\gamma}(D)$, $\gamma\in\mathbb{R}$ the weighted Sobolev type spaces as the completion of $C^1(\overline{D})$-functions, vanishing on Y, with respect to the norms induced by the inner products:

$$(u,v)_{H^{s,\gamma}(D)}=\sum_{|\alpha|\le s}\left(\rho^{|\alpha|-\gamma-s}\partial^\alpha u,\rho^{|\alpha|-\gamma-s}\partial^\alpha v\right)_{L^2(D)},\ s=0,\ s=1;$$
$$(u,v)_{H^{s,\gamma}(D)}=(u,v)_{H^{0,\gamma+s}(D)}+(\rho^{-\gamma}u,\rho^{-\gamma}v)_{H^s(D)},\ s\in(0,1).$$

Let $\mathcal{L}_0$ be the operator of the Lamé type on $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}_0(x,\partial) = \mu\nabla_3{}^*\nabla_3 I_3 + (\lambda+\mu)\nabla_3\nabla_3{}^*,$$

here $\mu > 0$, $2\mu+\lambda > 0$ are the Lamé constants The operator Lamé admits a factorization $\mathcal{L}_0(x,\partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, where $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathrm{rot}_3 \\ \sqrt{2\mu+\lambda}\mathrm{div}_3 \end{pmatrix}$.

We consider a non-coercive mixed problem:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0 + a_1\mathfrak{D} + a_0)u = f & \text{in} \quad D, \\ u = 0 & \text{on} \quad S, \\ Bu = (b_1(x)\nu_{\mathfrak{D}} + b_0(x) + \partial_\tau)u = 0 & \text{on} \quad \partial D, \end{cases}$$

here ∂_τ is a matrix of tangential partial differential operators on ∂D, $\nu_{\mathfrak{D}} = \sum_{j=1}^3 \mathfrak{D}_j^*\nu_j\mathfrak{D}$, $\rho a_1 \in L^\infty(D)$, $\rho^2 a_0 \in L^\infty(D)$, $b_1(x)$ is an invertible matrix on S. Let $H^{+,\gamma}(D)$ be the completion of $C^1(\overline{D})$-functions, which vanish on $\overline{S}$ with respect to the norm induced by the Hermitian form

$$(u,v)_{+,\gamma} = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{H^{0,\gamma}(D)} + (a_{0,0}u, v)_{H^{0,\gamma}(D)} + (b_1^{-1}b_{0,0}u, v)_{H^{0,\gamma}(\partial D\setminus S)},$$

and $H^{-,\gamma}(D)$ be the dual space for $H^{+,\gamma}(D)$ (here $a_0 = a_{0,0} + a_{0,1}$, $b_0 = b_{0,0} + b_{0,1}$). We are looking for solutions in $H^{+,\gamma}(D)$ with data in $H^{-,\gamma}(D)$. We prove the continuous embedding $H^{+,\gamma}(D) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}-\epsilon,\gamma}(D)$ for all $\epsilon > 0$ (for $\mathfrak{D}$ it can not be improved), and the Fredholm property of the problem under reasonable assumptions on $a_{0,0}$, b_1 and $b_{0,0}$.

R E F E R E N C E S

1. *Peicheva A. A., Shapunov A. A.* On the completeness of root functions of Sturm-Liouville problems for the Lamé system in weighted spaces. // Jornal of ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.), 2015. V. 95, no. 11, 1202–1214.

V.Petrosyan (Yerevan, Armenia)
v.g.petrosyan91@gmail.com

RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM IN WEIGHTED SPACES

Let $\rho(t) = |t-t_1|^{\alpha_1}...|t-t_m|^{\alpha_m}, t_k \in T$, where $T = \{t, |t| = 1\}$ is unit circumference and $\alpha_k, k = 1, 2...m$ are real numbers. By

$$\rho_r(t) = \rho^*(t)|r^{\delta_1}t - t_1|^{n_1}...|r^{\delta_m}t - t_m|^{n_m}$$

we denote $\rho^*(t) = |t-t_1|^{\lambda_m}...|t-t_1|^{\lambda_m}$,

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha_k \le -1\ , \\ 0, & \text{if } \alpha_k > -1\ , \end{cases}$$

$$n_k = \begin{cases} [\alpha_k]+1, & \text{if } \alpha_k \text{ isn't integer}, \\ \alpha_k, & \text{if } \alpha_k \text{ is integer} \end{cases}$$

$\lambda_k = \alpha_k - n_k$. It's clear that $\lambda_k \in (-1, 0]$ and $\rho^*(t) \in L^1(T)$.
Let's consider problem R in the following statement:
Problem R. Let f is arbitrary function in T belonging to the classes $L^1(\rho)$. Find analytic function $\Phi(z)$, $\Phi(\infty) = 0$ in $D^+ \cup D^-$, where $D^+ = \{z; |z| < 1\}$, $D^- = \{z; |z| > 1\}$ such that

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0, \tag{1}$$

Where $a(t), a(t) \neq 0$ is arbitrary function from $C^\delta(T)$,$\delta > 0$, $\Phi^\pm$ are distinctions of function Φ in $D^\pm$ respectively. Let $\kappa = inda(t), t \in T$. Analog problem where $\rho(t) \equiv 1$ is investigated in [1].

In this work it is found that if $\sum_{k=1}^m n_k + \kappa \ge 0$, then problem R is solvable for any function f from $L^1(\rho)$. In case of $\sum_{k=1}^m n_k + \kappa < 0$ are given necessary and sufficient conditions for the solvability of this problem. Besides, solutions are given in explicit form.

References

[1] Г.М. Айрапетян. Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1. Изв. АН Арм. ССР мат. 1990, XXУ,1,3-20.

Г. Г. Петросян (Воронеж, Россия)
garikpetrosyan@yandex.ru

О ПРИЛОЖЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть E - банахово пространство, $C([0,a];E)$- пространство непрерывных функций на $[0,a]$ со значениями в E. Символом $Kv(E)$ обозначим совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E. В докладе мы вначале рассматриваем задачу Коши для дифференциального включения дробного порядка в пространстве E, следующего вида:

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)),\ t \in [0,a],$$

$$x(0) = x_0,$$

где $D^q,\ 0 < q < 1$, - дробная производная Капуто, $F : [0,a] \times E \to Kv(E)$ - многозначное отображение, $A : D(A) \to E$ - линейный замкнутый оператор в E (не обязательно ограниченный), порождающий C_0- полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ и $x_0 \in E$.

Затем, мы рассматриваем задачу Коши для дифференциального включения дробного порядка в пространстве E, следующего вида:

$$D^q x(t) \in F(t, x(t), D^q x(t)), \qquad t \in [0,a],$$

$$x(0) = x_0,$$

где $D^q, 0 < q < 1$, - дробная производная Капуто, $F : [0,a] \times E \times E \to Kv(E)$ - многозначное отображение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Обуховский В. В., Петросян Г. Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ, серия Физика. Математика № 1, 2013.- ст. 192-209.

2. *Обуховский В. В., Петросян Г. Г.* О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием // Вестник ВГУ, серия Физика. Математика № 1, 2014.- ст. 106-126.

3. *Петросян Г. Г.*О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Вестник ВГУ, серия Физика. Математика № 2, 2012.- ст. 207-212.

A. N. Polkovnikov (Krasnoyarsk, Russia)
paskaattt@yandex.ru

ON NON-COERCIVE MIXED PROBLEMS FOR PARAMETER-DEPENDENT ELLIPTIC OPERATORS

Let D be a bounded domain with a Lipschitz boundary in the complex space $\mathbb{C}^n$. Consider a second order parameter-dependent partial differential operator $A(z,\overline{\partial},\lambda)$ of a divergence form

$$A(z,\overline{\partial},\lambda)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\partial}_i^*(a_{i,j}(z)\overline{\partial}_j)u + \sum_{j=1}^{n} a_j(z)\overline{\partial}_j u + a_0(z)u + \lambda^2 a_0^{(2)}(z)u,$$

and the first order Robin type boundary differential operator

$$B(z,\overline{\partial})u = b_1(z)\overline{\partial}_\nu u + b_0 u,$$

where $\overline{\partial}_\nu$ is the complex conormal derivative. The coefficients $a_{i,j}(z)$, $a_j(z)$, $a_0(z)$, $a_0^{(2)}(z)$ and $b_0(z)$, $b_1(z)$ being bounded measurable complex-valued functions in D and on ∂D respectively. We also allow the function $b_1(z)$ to vanish on an open connected subset S of ∂D.

We consider the following family of boundary value problems. Given data f in D and u_0 in ∂D, find a distribution u in $\overline{D}$, which satisfies

$$\begin{cases} A(z,\overline{\partial},\lambda)u = f & \text{in} \quad D, \\ B(z,\overline{\partial})u = u_0 & \text{on} \quad \partial D. \end{cases} \tag{1}$$

We suppose that, for each $z \in \mathbb{C}^n$, the matrix $(a_{i,j}(z))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ is Hermitian and there is a constant $m > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(z)\overline{w}_i w_j \geq m\,|w|^2\,, \tag{2}$$

for all $(z,w) \in \overline{D} \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$.

We had proved that weak formulation of problem (1) is a fredholm family of non-coercive mixed problems. Also we had consided the spectral properties of such problems.

R E F E R E N C E S

1. *Agranovich M. S., Vishik M. I.* Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. // Uspekhi Mat. Nauk. 1964. ь. 19, P. 53–161.

2. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators. // J. of Differential Equations. 2013. ь. 10, P. 3305–3337.

Д. Ю. Почекутов (Красноярск, Россия)
dpotchekutov@sfu-kras.ru

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТА СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРЕЗ МНОГОМЕРНЫЕ СТЕПЕННЫЕ СУММЫ КОРНЕЙ

Пусть $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ – нульмерный идеал в кольце многочленов $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Хорошо известно, что в этом случае векторное пространство

$$A = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/I$$

над полем $\mathbb{C}$ обладает конечным мономиальным базисом

$$\mathcal{B} = \{z^{\beta^0}, \ldots, z^{\beta^d}\},\ \beta^i \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.$$

Напомним, что *многомерные степенные суммы корней* – это суммы вида

$$s_\beta = \sum_{a \in V_{\mathbb{C}}(I)} a^\beta = \sum_{a \in V_{\mathbb{C}}(I)} a_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\beta_n},$$

где $V_{\mathbb{C}}(I)$ – нулевое множество идеала I.

Ревизия известного результата, обобщающего теорему Сильвестра-Эрмита о числе вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами на многомерный случай, из [1] позволяет получить следующую

Теорема *Дискриминант системы алгебраических уравнений*

$$f_1 = \ldots = f_n = 0$$

допускает представление

$$D = \begin{vmatrix} s_{\beta^0} & s_{\beta^1} & \ldots & s_{\beta^d} \\ s_{\beta^1} & s_{\beta^1+\beta^1} & \ldots & s_{\beta^1+\beta^d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{\beta^d} & s_{\beta^d+\beta^1} & \ldots & s_{\beta^d+\beta^d} \end{vmatrix}.$$

R E F E R E N C E S

1. *Pedersen P., Roy M.-F., Szpirglas A.* Counting real zeros in the multivariate case. // Progress in Mathematics 1993. Vol. 109. P. 203–224.

D. B. Rokhlin (Southern Federal University, Russia)
rokhlin@math.rsu.ru

ASYMPTOTIC SEQUENTIAL RADEMACHER COMPLEXITY OF A FINITE FUNCTION CLASS

The notion of sequential Rademacher complexity was introduced in [1]. Let $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ be independent Rademacher random variables: $\mathsf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathsf{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Consider a set $\mathcal{Z}$, endowed with a σ-algebra $\mathscr{G}$, and a collection $\mathcal{F}$ of Borel measurable functions $f : \mathcal{Z} \mapsto \mathbb{R}$. For any sequence of functions $z_n : \{-1, 1\}^{n-1} \mapsto \mathcal{Z}$, $n \geq 1$, where z_1 is simply an element of $\mathcal{Z}$, put

$$\mathfrak{R}_n(\mathcal{F}, z_1^n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathsf{E} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t f(z_t(\varepsilon_1^{t-1})).$$

By a_1^n we denote a sequence $(a_1, \ldots, a_n)$. The *sequential Rademacher complexity* of the function class $\mathcal{F}$ is defined by $\mathfrak{R}_n(\mathcal{F}) = \sup_{z_1^n} \mathfrak{R}_n(\mathcal{F}, z_1^n)$.

The incentives to study this quantity come from the online learning theory. For a finite function class $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ we characterize $\mathfrak{R}^a(\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{R}_n(\mathcal{F})$, which we call the *asymptotic sequential Rademacher complexity* of $\mathcal{F}$, in terms of the viscosity solution of a G-heat equation.

Theorem 1. *Denote by Γ the closure of the set $\{(f_1, \ldots, f_m)(z) : z \in \mathcal{Z}\} \subset \mathbb{R}^m$. Let $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ be the unique continuous viscosity solution of the problem*

$$-v_t(t, x) - \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i,j=1}^m \gamma^i \gamma^j v_{x_i x_j} = 0,$$

$$v(1, x) = \max\{x_1, \ldots, x_m\}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

satisfying the linear growth condition: $|v(t, x)| \leq C(1 + |x|)$. Then $\mathfrak{R}^a(\mathcal{F}) = v(0, 0)$.

In the language of Peng's sublinear expectation theory, $\mathfrak{R}^a(\mathcal{F})$ can be regarded as the sublinear expected value of the largest order statistics of a multidimensional G-normal random variable. We illustrate Theorem 1 by deriving upper and lower bounds for $\mathfrak{R}^a(\mathcal{F})$.

R E F E R E N C E S

1. *Rakhlin A., Sridharan K., Tewari A.* Online learning: random averages, combinatorial parameters, and learnability // Adv. Neural Inf. Process. Syst. 2010. Vol. 23. P. 1984–1992.

M. A. Sumbatyan, V. V. Abramov (Rostov-on-Don, Russia)
masumbatyan@sfedu.ru

ACCELERATION OF THE CONVERGENCE OF GREEN'S FUNCTIONS SERIES REPRESENTATION FOR A TURBULENT FLOW IN THE CHANNEL

Let us study the two-dimensional turbulent flow of a non-viscous incompressible fluid in the channel of constant width: $0 < y < b$. The Navier-Stokes equations can be written in terms of the stream function ψ and the vorticity function ζ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu\Delta\zeta,\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta\psi, \tag{1}$$

where ν is the kinematic viscosity. If the flow rate Q is known then the boundary conditions for equations (1) are as follows

$$\psi|_{y=0} = 0, \qquad \psi|_{y=b} = Q, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{2}$$

In frames of the iteration process in time, with the time step θ, the following system for functions $\psi^{(n)}$ and $\zeta^{(n)}$ should be solved at each iteration step ($\varepsilon = \nu\theta$):

$$\zeta^{(n)} - \varepsilon\Delta\zeta^{(n)} = \zeta^{(n-1)} + \theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^{(n-1)}, \quad \Delta\psi^{(n)} = \zeta^{(n)}, \tag{3}$$

with boundary conditions (2) for function $\psi^{(n)}$.

By accepting that the flow is periodic along the channel with the period L, Green's functions for partial differential operators in (3) can be constructed in the following form ($b_m = \pi m/b$, $\lambda_m = \sqrt{b_m^2 + 1/\varepsilon}$):

$$G_\psi(\xi,\eta,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{b_m|\xi-x|} + e^{b_m(L-|\xi-x|)}}{\pi m\,(1 - e^{b_m L})}\ \sin(b_m y)\sin(b_m\eta), \tag{4}$$

$$G_\zeta(\xi,\eta,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_m|\xi-x|} + e^{\lambda_m(L-|\xi-x|)}}{b\,\varepsilon\lambda_m\,(1 - e^{\lambda_m L})}\ \sin(b_m y)\sin(b_m\eta), \tag{5}$$

The solutions to system (3), functions $\psi^{(n)}$ and $\zeta^{(n)}$, are explicitly expressed in terms of Green's functions (4) and (5) and their derivatives. This involves slowly-convergent or even divergent series, and the main goal of the present work is to arrange the acceleration of the arising series, to treat them correctly.

I. Yu. Smirnova, (Rostov-on-Don, Russia)
smi_irina_dstu@mail.ru

ON SOME WIEGHTED VARIABLE EXPONENT MIXED NORM BERGMAN TYPE SPACES

We introduce and study the weighted variable exponent mixed norm Bergman-type spaces on the unit disc in the complex plane. We prove the boundedness of the Bergman projection and reveal the dependence of the nature of such spaces on possible growth of variable exponent $p(r)$ when $r \to 1$ from inside the interval $I = (0, 1)$.

В. И. Суковых(Воронеж, Россия)
sukovyh@gmail.com

О ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ ЛАКУНАРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Рассмотрим вещественно-аналитическую гиперповерхность M в $\mathbb{C}^3$, имеющую нормальное уравнение Мозера ([1])

$$Im\, z_3 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k,l\geq 2, m\geq 0} N_{klm}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)(Re\, z_3)^m. \tag{1}$$

В задаче об однородности таких поверхностей основную роль играют многочлены N_{220} и N_{320} из уравнения (1). В [2] изложена схема описания однородных поверхностей (1) «общего положения». Для таких поверхностей

$$N_{220} = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2) + \mu(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4), \mu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и два коэффициента многочлена N_{320} равны нулю:

$$\omega_6 = \omega_7 = 0. \tag{3}$$

В [2] использовано также *допущение* о неравенстве

$$\omega_3 \neq 0 \tag{4}$$

для еще одного из (двенадцати) коэффициентов этого многочлена. Интерес представляют и другие (лакунарные) случаи, в которых коэффициент ω_3 (или другие коэффициенты $\omega_k (k \neq 6, 7)$) обращается в нуль. Их рассмотрение приводит к следующему утверждению.

Теорема. *Для голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей (1)-(3) неравенство (4) выполняется автоматически.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133, N 3. P. 219-271.

2. *Лобода А. В., Суковых В. И.* Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей // Вестник ВГУ. Системный анализ. 2015. N 1. С. 14-22.

Х. Х. Бурчаев (Грозный), В. Г. Рябых (Ростов-на-Дону), Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)
ryabich@aaanet.ru

МЕТОД ВЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Пусть $\mathcal{A}$ – подпространство пространства L_p, $1 \leq p < \infty$, по единичному кругу D, функция $w \in L_p$ задана. Рассматривается задача о

$$X \in L_p : \inf \{\|w - x\|_p : x \in \mathcal{A}\} = \|w - X\|_p.$$

Пусть A_p – обычное пространство Бергмана, $E_N = \{\varphi \in A_p : \varphi(z) = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n z^n,\ \varphi_n -$ тейлоровы коэффициенты$\Big\}$; $A(A(R), A(\mathbb{C}))$ – совокупность функций, аналитических в $D(\{|z| < R, R > 1\}, \mathbb{C})$.

Теорема 1. *Если $p \geq 1$, $w = \bar{\omega}, \omega \in A(R)$ и $\mathcal{A} = A_p$, то $X \in A(R)$.*

Теорема 2. *Если $p \geq 1$, w – полином N-ой степени и $\mathcal{A} = E_N$, то $X \in A(\mathbb{C})$.*

Аналогичные утверждения имеют место относительно $L_p(|t| = 1)$ и H_p (пространство Харди).

Доказательство проводится посредством погружения $A_p(H_p)$ в более широкий класс.

Этод метод позволяет уточнить и дополнить ряд старых результатов по экстремальным задачам в $A_p(H_p)$. Например, удается доказать, что экстремальные функции (э.ф.) функционалов над $A_p(H_p), p \geq 1$, образованных полиномом, принадлежат $A(\mathbb{C})$. Это в расширение результатов из [1] позволяет найти форму э.ф. относительно $A_p, p \geq 1$ (с произведением Бляшке конечной степени).

Метод вложения впервые был применен авторами в [2], $p > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beneteau C.and Khavinson D.* A survey of linear extremal problems in analytic function spaces // Complex Analysis and Potential Theory. CRM Proc. Lecture Notex. 2012. N 55. P. 33–46.

2. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционала, образованного полиномом над пространством Бергмана // Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. Т. 8, Ч. 1. С. 204–214.

С. М. Ситник (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА–ЭРДЕЙИ

Теория операторов преобразования составляет самостоятельный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения [1–6]. Важным классом операторов преобразования являются операторы Бушмана–Эрдейи.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960–х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи. Операторы Бушмана–Эрдейи или их аналоги изучались также в работах E. T. Copson, T.P. Higgins, Ta Li, E.R. Love, Динь Хоанг Ань, В.И. Смирнова, Н.А. Вирченко, А.А. Килбаса, О.В. Скоромник, Б. Рубина, А.В. Глушака и ряде других работ. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения.

В докладе рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов к вложению пространств И.А. Киприянова в весовые пространства С.Л. Соболева, формулам для решений уравнений с частными производными с операторами Бесселя, уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу, включая лемму Копсона, построению операторов обобщённого сдвига, операторам Дункла, преобразованию Радона, построению обобщённых сферических гармоник и B–гармонических полиномов, а также доказательству унитарности в пространстве Лебега обобщений классических операторов Харди. Приведён обзор результатов В.В. Катрахова по приложению операторов преобразования к теории псевдодифференциальных операторов и изучению введённого им нового класса краевых задач с K—следом с существенными особенностями в решениях.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00331).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications. Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013. 171–201. (arxiv 1304.2114).

2. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a survey. arXiv:1012.3741, 2012. – 141 P.

3. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения. В сб. Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Редакторы Коробейник Ю.Ф., Кусраев А.Г.) Владикавказ, 2008. 226–293.

Р. В. Ульверт (Красноярск, Россия)
ulvertrom@yandex.ru

О ЦИКЛАХ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ НАБОР ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ — набор замкнутых подмножеств вещественного многообразия X. Будем говорить, что n-мерный цикл Γ из $X \setminus (Y_1 \cup \dots \cup Y_m)$ *разделяет* набор Y, если для всех поднаборов индексов $\{j_1, \dots, j_{d-n-1}\} \subset \{1, \dots, m\}$ цикл Γ гомологичен нулю в $X \setminus (Y_{j_1} \cup \dots \cup Y_{j_{d-n-1}})$.

Понятие разделяющего цикла появилось в комплексном анализе в связи с многомерными вычетами. Пусть X — комплексно аналитическое многообразие комплексной размерности n. Можно показать, что n-циклы, участвующие в определении локальных вычетов для системы m дивизоров в X (*локальные* циклы), разделяют данную систему дивизоров. Нас интересуют условия, при которых верно обратное утверждение (*гипотеза о разделяющих циклах*): каждый разделяющий цикл гомологичен линейной комбинации локальных циклов. Случай $m = n$ подробно исследовался А. К. Цихом (см. [1]). При $m > n$ в частных случаях гипотеза подтверждена А. П. Южаковым (см. [2]). Автором данного сообщения доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда гипотеза о разделяющих циклах справедлива для всякого набора из $n+1$ ростков дивизоров в точке a.*

Другой пример применения понятия разделяющего цикла связан с так называемыми *кольцами Борромео*. Речь идет о нетривиальном зацеплении, состоящем из трех попарно непересекающихся колец, которые попарно незацеплены. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть X — сфера S^{2n+1} размерности $2n+1$, и Y — набор из $n+2$ попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Каждая сфера из набора Y гомологически тривиальна в дополнении остальных сфер.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск: Наука, 1988.

2. *Южаков А. П.* Разделяющая подгрупа и локальные вычеты // Сиб. мат. журн., 1988. Т. 29, вып. 6. С. 197–203.

K. Yu. Fedorovskiy (Moscow, Russia)
kfed.bmstu@gmail.com

APPROXIMATION PROBLEMS FOR POLYANALYTIC FUNCTIONS

The lecture will be devoted to the topic of approximability of functions by polyanalytic rational functions and polynomials (i.e. by functions /polynomials of the form $\overline{z}^n f_n(z) + \dots + \overline{z} f_1(z) + f_0$, where $f_0, f_1, \dots, f_n$ are rational functions /polynomials in the complex variable and $n \geqslant 0$ is an integer) in norms of the spaces of continuous and smooth functions on compact subsets of the complex plane. These problems were appeared at the end of 1970-th in the context of approximation of functions by rational modules. In two recent decades they are intensively studied in connection with problems of approximability of functions by solution of general elliptic PDE. It is planned to discuss the history of the topic and several recent results.

D. P. Fedchenko (Krasnoyarsk, Russia)
fdp@bk.ru

A CLASS OF TOEPLITZ OPERATORS IN SEVERAL VARIABLES

We introduce the concept of Toeplitz operators associated with the Hardy space of solutions to an elliptic system of first order partial differential equations in a bounded domain with smooth boundary. We characterise those Toeplitz operators which are Fredholm, thus initiating the index theory.

А. Н. Черепанский (Красноярск, Россия)
alex.cherepanskiy@gmail.com

ОБ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В работе исследуются области сходимости гипергеометрических рядов, представляющих решения для общего тетраномиального алгебраического уравнения

$$a_0 + a_l y^l + a_m y^m + a_n y^n = 0,$$

где l, m, n — взаимно просты и $l < m < n$.

Простыми мономиальными преобразованиями такое уравнение можно свести к приведенному виду, зафиксировав произвольную пару коэффициентов a_p, a_q. Решения уравнений тогда будут представляться в виде двойных степенных рядов. Мы дадим описание областей сходимости D_{pq} этих рядов в виде явных функциональных неравенств, в которых участвует дискриминант Δ_{pq} уравнений.

Комбинаторное описание таких областей сходимости было дано в работе Пассаре-Циха [1].

Для приведенного уравнения обозначим дополнительную пару коэффициентов через a_t, a_s.

Теорема 1. *Для любой пары $p, q \in \{0, l, m, n\}$ область сходимости D_{pq} ряда, представляющего решение приведенного тетраномиального уравнения, задается либо одним неравенством одного из следующих типов*

$$\varepsilon^{\mp(t-p)(s-p)} \Delta_{pq}\Big(\pm\varepsilon^{t-p}\,|a_t|\,, \pm\varepsilon^{s-p}\,|a_s|\Big) \lesseqgtr 0,$$

$$\Delta_{pq}\Big(-\,|a_t|\,, -\,|a_s|\Big) > 0,$$

либо двумя неравенствами одного из следующих типов

$$\Delta_{pq}\Big(\varepsilon^{t-p}\,|a_t|\,, \varepsilon^{s-p}\,|a_s|\Big) \lesseqgtr 0, \quad \Delta_{pq}\Big(-\,|a_t|\,, -\,|a_s|\Big) \lesseqgtr 0,$$

$$\Delta_{pq}\Big(-\varepsilon^{t-p}\,|a_t|\,, -\varepsilon^{s-p}\,|a_s|\Big) \lesseqgtr 0, \quad \Delta_{pq}\Big(\varepsilon^{p-t}\,|a_t|\,, \varepsilon^{p-s}\,|a_s|\Big) \lesseqgtr 0,$$

где ε — первообразный корень степени $q-p$ из -1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Passare M., Tsikh A. K.* Algebraic equations and hypergeometric series // The Legacy of N.H.Abel, Springer-Verlag, 2004. P. 653–672.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

Е. К. Лейнартас, О. А. Шишкина (Красноярск, Россия)
lein@mail.ru, olga_a_sh@mail.ru

ОБОБЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ТОДДА И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА – МАКЛОРЕНА

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \ldots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - целые числа.

Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1, \ldots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, n\}$.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом: $u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K$, где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v.

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$, построенный на образующих рационального конуса.

Для векторов $v = \xi_1 a^1 + ... + \xi_n a^n$, заданных в базисе $a^1, ..., a^n$ координатами $(\xi_1, ..., \xi_n)$, введем следующее преобразование $\chi_a(v)$: $\chi_a(v) = \sum\limits_k \chi(\xi_k)\, a^k$, где

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, \xi = 0; \\ 0, \xi \neq 0. \end{cases}$$

Theorem 1. *Пусть $Td(\partial) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\langle a^j, \partial\rangle}{e^{\langle a^j, \partial\rangle} - 1}$ – оператор Тодда, действующий на функциях $\varphi(t) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$, и x лежит на подрешетке решетки $\mathbb{Z}^n$, порожденной векторами $a^1, ..., a^n$, тогда справедлива формула*

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int\limits_{\Pi_K^v} Td(\partial)\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

где $\Pi_K^v(x) = \left\{t \in \mathbb{R}^n : v \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} v + x + \chi_a(v)\right\}$, *а*
$\Pi_a = \left\{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{<} a\right\}$ – *фундаментальный параллелотоп.*

А. В. Щуплев (Красноярск)
alexey.shchuplev@gmail.com

СТЕПЕННЫЕ МИНОРАНТЫ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ [4]

[4]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор № 14.Y26.31.0006.

Определение 1 [[1]] Многочлен Лорана $P(x) = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma x^\gamma$ от n вещественных переменных называется квазиэллиптическим, если все его срезки

$$P_\Gamma(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma x^\gamma$$

на собственные грани Γ многогранника Ньютона Δ не обращаются в нуль в торе $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$.

Теорема 1 [[2]] *Многочлен $P(x)$ является квазиэллиптическим тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta^\circ$ найдется компакт K и константы c, $k > 0$ такие, что*

$$\forall x \notin K \quad |P(x)| \geqslant c|x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_n|^{\alpha_n} + k.$$

Этот факт позволяет дать геометрическое условие гипоэллиптичности (по Хёрмандеру) квазиэллиптического многочлена.

Теорема 2 [[2]] *для того, чтобы квазиэллиптический многочлен был гипоэллиптическим достаточно, чтобы его многогранник Ньютона был строго полным.*

Список литературы

[1] Т.О. Ермолаева, А. К. Цих Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, Матем. сборник, 187 (1996), №9, 45 – 64.

[2] A.V. Shchuplev, A.K. Tsikh, E.V. Zubchenkova Power minorants for quasielliptic polynomials, in preparation

Т. И. Яковлева (Красноярск, Россия)
t.neckrasova@gmail.com

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta)f(x) = g(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \tag{1}$$

где $P(\delta) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega \delta^\omega$ — полиномиальный разностный оператор, $\Omega \in K$, K — рациональный конус, $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$, $\varphi(x)$ — заданные на множестве $K \cap \mathbb{Z}^n$ функции. Сформулируем следующую задачу.

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и совпадающую на множестве X_m с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_m, \tag{2}$$

где $X_m = K \setminus \{m + K\}$.

Эту задачу естественно назвать задачей Коши для уравнения (1), а условие (2) — начальными данными задачи Коши.

В случае разрешимости задачи Коши понятие устойчивости введем следующим образом. Для функции $f(x)$, заданной на множестве $K\cap\mathbb{Z}^n$, определим ее норму $\|f\| = \sup\limits_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} |f(x)|$ и назовем *задачу Коши* (1)–(2) *устойчивой*, если существует константа $C > 0$ такая, что для любых $\varphi(x)$ и $g(x)$, соответствующее решение $f(x)$ задачи удовлетворяет условию $\|f\| \leqslant C(\|\varphi\| + \|g\|)$.

Амебой $\mathcal{A}$ называется образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении

$$Log : z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|) = Log|z|.$$

Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$ состоит из конечного числа связных открытых компонент E, и компоненту E_m, соответствующую точке m, назовем главной.

Теорема 1. *Пусть $m \in \Omega$, $|m|_\nu = d$ — порядок разностного оператора и двойственный к точке m конус C_m содержит конус K^*, двойственный к K. Задача* (1)–(2) *устойчива тогда и только тогда, когда главная компонента E_m дополнения амебы содержит ноль, т. е. $0 \in E_m$.*

Для $n = 1$ условие $0 \in E_m$ означает, что все корни характеристического многочлена лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, т. е. задача устойчива.

И. Лифлянд
liflyand@gmail.com

ASYMPTOTIC RELATIONS FOR THE FOURIER TRANSFORM OF A FUNCTION OF BOUDED VARIATION

Earlier and recent one-dimensional estimates and asymptotic relations for the cosine and sine Fourier transform of a function of bounded variation are refined in such a way that become applicable for obtaining multidimensional asymptotic relations for the Fourier transform of a function with bounded Hardy variation.

I. G. Tsar'kov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

SOLARITY AND ε-SELECTION

In what follows, X is real Banach space and $B(x,r)$ is the closed ball with centre x and radius $r \geqslant 0$. The best approximation, that is, the distance of a given element $x \in X$ from a given non-empty set $M \subset X$ is, by definition, $\varrho(x,M) := \inf\limits_{y\in M} \|x-y\|$. The set of all nearest points in M is denotes by $P_M x$, i.e. $P_M x := \{y \in M \mid \varrho(x,M) = \|x-y\|\}$. A set $\emptyset \neq M \subset X$ is called a strict sun if for any point $x \in X$ the set $P_M x \neq \emptyset$ and $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ for arbitrary point $y \in P_M x$ and all $\lambda \geqslant 0$.

Let $\varepsilon > 0$ and $M \subset X$. A map $\varphi : X \to M$ is called a multiplicative (additive) ε-selection if for all $x \in X$

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\varrho(x,M) \qquad \text{(respectively, } \|x-\varphi(x)\| \leqslant \varrho(x,M) + \varepsilon).$$

Theorem 1 *Let $M \subset X$ be a strict sun. Then the following conditions are equivalent:*
a) M has a continuous multiplicative (additive) ε-selection for any $\varepsilon > 0$;
b) for any $x \in X$ and all $R > \varrho(x,M)$ the set $M \cap B(x,R)$ is contractible in itself to a point.

Corollary 1 *Let X be a finite-dimensional normed linear space and let $M \subset X$ be a strict sun. Then the following conditions are equivalent:*
a) M has a continuous multiplicative (additive) ε-selection for any $\varepsilon > 0$;
b) for any $x \in X$ and all $R > \varrho(x,M)$ the set $M \cap B(x,R)$ is contractible in itself to a point;
c) for any $x \in X$ the set $P_M x$ is cell-like.

This research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 16-01-00295).

R E F E R E N C E S

1. *Alimov A. R., Tsar'kov I. G.* Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation// Russian Mathematical Surveys. 2016. Vol. 71, № 1. P. 1-77
2. *Tsar'kov I. G.* Continuous ε-selection// Sbornik: Mathematics. 2016. Vol. 207, № 2. P. 267-285.
3. *Царьков И. Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка// Изв. РАН. Сер. матем.. 2016. Т. 80, № 2. С. 165–184.
4. *А. Р. Алимов, И. Г. Царьков.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств// Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 4. С. 21–91.

Захарян В. С., Даллакян Р. В. (Ереван, Армения)
mathdep@seua.am dallakyan57@mail.ru

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ $B_\alpha(-1 < \alpha \leq 0)$ НЕКОТОРЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ КЛАССАМ

Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана - Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс Р. Неванлинны мероморфных в единичном круге функций, вводя в рассмотрение классы $N_\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения, которые в специальном случае $\alpha = 0$ превращаются в произведение Бляшке.

Пусть $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$. Класс D^p_α определяется как множество тех аналитических в единичном круге функций для которых

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha |f'(re^{i\phi})|^p r d\phi dr < +\infty.$$

Если $\alpha+1 < p$, то эти классы называются классами аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом типа Дирихле.

В работе доказывается, что при $-1 < \alpha < 0$ произведения B_α принадлежат классу $D^2_{1+\alpha}$. Далее доказывается, что бесконечное произведение $B_\alpha(-1 < \alpha \leq 0)$ не может принадлежать классу D^2_0. Следовательно не может принадлежать также классу H^1 Харди. Далее, используя эти утверждения, доказываются некоторые предложения о граничном поведении произведений $B_\alpha(-1 < \alpha < 0)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государствен- ного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Изд. "Наука Москва, 1966.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* О факторизации функций B_α. // Мат. заметки, 1968. т.4, N1, стр. 3-10.
3. *Захарян В. С.* Об одной оценке для произведения М. М. Джрбашяна. Изв. АН Арм. ССР, Математика, XXIII, N2.

2 Математическая физика и аналитическая механика

С. М. АЙзикович, Е. В. Берусова, Б. И. Митрин (Ростов-на-Дону, Россия)
boris.mitrin@gmail.com

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО ТЕРМОФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА ЖЁСТКОГО ТЕЛА, СКОЛЬЗЯЩЕГО ПО ПОКРЫТИЮ НА УПРУГОЙ ПОДЛОЖКЕ

Рассматривается задача о контакте жёсткой полуплоскости, с постоянной скоростью скользящей по поверхности упругого покрытия, сцепленного с упругой подложкой из другого материала. Контакт между жёсткой полуплоскостью и покрытием осуществляется с учетом трения и разогрева покрытия от трения. В процессе скольжения жёсткая полуплоскость внедряется в поверхность покрытия. На границе покрытия и подложки заданы условия полного сцепления и идеального теплового контакта.

Решение сформулированной нестационарной начально-краевой задачи термоупругости в квазистатической постановке получено с помощью интегрального преобразования Лапласа в виде свертки. Установлены параметрические области устойчивых и неустойчивых решений задачи. Исследовано влияние упругих свойств подложки на границу между этими областями. В результате вычисления свёртки получены формулы основных характеристик задачи — температуры, смещений, напряжений — в виде рядов по собственным числам начально-краевой задачи. С помощью полученных формул проанализировано влияние параметров задачи, а также упругих и термомеханических свойств материала подложки на величину контактных напряжений и температуры.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-07-00271-а.

I. A. Antipova (Krasnoyarsk, Russia)
iantipova@sfu-kras.ru

BOCHNER–MARTINELLI RESIDUE CURRENTS ASSOCIATED WITH MONOMIAL MAPPINGS

Let us consider a residue current T_f of the Bochner–Martinelli type. It is associated with a holomorphic mapping $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, $p \leqslant n$, and it is given by the kernel

$$\Omega(f) = \frac{1}{\|f\|^{2p}} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \overline{f_k} \bigwedge_{l \neq k} \overline{df_l}.$$

Following [1], we consider the current

$$T_f(\varphi) := \lim_{\eta \to 0} c_p \int\limits_{\|f\|^2 = \eta} \Omega(f) \wedge \varphi \tag{1}$$

with action on smooth and compactly supported test forms φ of the bidegree $(n, n-p)$.

We study the structure of the residue current (1) when f is a monomial mapping. Let us represent the test form φ as follows $\varphi = \sum\limits_I \tilde{\varphi}_I$, where $I = (i_1, \dots, i_p)$ is an ordered subset of $\{1, \dots, n\}$ and $\tilde{\varphi}_I = \varphi_I d\zeta \wedge d\bar{\zeta}[I]$.

Theorem 1. *The Bochner–Martinelli residue current T_f, associated with the monomial mapping f, admits the representation*

$$T_f(\varphi) = \sum_{\sharp I = p} T_f^I(\tilde{\varphi}_I),$$

where T_f^I is an exterior product of simple residue currents $\bar{\partial}\left[1/\zeta_i^{\beta^i}\right]$, principal value currents $\left[1/\zeta_k^{\beta^k}\right]$ and a hypergeometric function.

The result is a direct generalization of [1, Prop. 3.1] where only the case $p = n$ was considered. Moreover, it complements the study of the residue currents of monomial ideals in [2].

R E F E R E N C E S

1. *Passare M., Tsikh A., Yger A.* Residue currents of the Bochner-Martinelli type. // Publ. Mat. 2000. Vol. 44. P. 85–117.
2. *Wulcan E.* Residue Currents of Monomial Ideals. // Indiana Univ. Math. J. 2007. Vol. 56. No. 1. P. 365–388.

И. Я. Арефьева (Moscow, Russia)

ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ДУАЛЬНОСТЬ

В докладе будут обсуждаться решения краевых задач на однородных пространствах SL(2,R)/G, где G дискретная подгруппа, порожденная эллиптическими или гиперболических элементами, а также на их евклидовых продолжениях. Факторизация по гиперболическому элементу соответствует решениям уравнений Эйнштейна, описывающим черные дыры, а по эллиптическому элементу – конической особенности. Будет рассказано о связи соответствующих функций Грина и широко используемой в квантовой теории поля дуальности между моделями на пространстве анти де Ситтера и на его границе.

E. S. Baranovskii (Voronezh, Russia)
esbaranovskii@gmail.com

EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS FOR 3-D FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS OF OLDROYD TYPE WITH SLIP BOUNDARY CONDITIONS[1]

[1]The work was funded by RFBR according to the research project No. 16-31-00182 mol_a.

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^3$ with the boundary $\Gamma \in \mathcal{C}^2$. We consider the initial-boundary value problem which describes the motion of an incompressible viscoelastic fluid of Oldroyd type in Ω subject to the Navier slip boundary condition:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \operatorname{Div}\big(\boldsymbol{E} + (1-\alpha)\eta \mathbf{D}\boldsymbol{v}\big) + \nabla p = \boldsymbol{f} \ \text{ in } \ \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ in } \ \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E} + \lambda \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{E} \right) = \alpha \eta \mathbf{D}\boldsymbol{v} \ \text{ in } \ \Omega \times (0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k\boldsymbol{v} = -\big[\big(\boldsymbol{E} + (1-\alpha)\eta \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}\big)\mathbf{n}\big]_\tau \ \text{ on } \Gamma \times (0,T), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{E}(\cdot,0) = \boldsymbol{E}_0 \ \text{ in } \Omega. \tag{5}$$

Here $\boldsymbol{v}$ is the velocity, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = (\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})/2$, $\boldsymbol{E}$ is the elastic part of the extra-stress, p is the pressure, T denotes final time, $\boldsymbol{f}$ is the body force, $\mathbf{n}$ is the outer unit normal on Γ, the symbol $[\,\cdot\,]_\tau$ denotes the tangential component of a vector field, $k\colon \Gamma \to [0,\infty)$ is a bounded function, and α, λ, η are material constants such that $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$, $\eta > 0$. For more details about viscoelastic fluid of the Oldroyd kind, we refer to [1].

As our main result, we have the following theorem.

Theorem.

1) *Problem* (1)–(5) *has at least one weak solution* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E})$ *on* $(0,T)$.

2) *If* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E})$ *is a weak solution of problem* (1)–(5) *and*

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_s\big(0,T;\boldsymbol{L}_r(\Omega)\big), \quad \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{L}_2\big(0,T;\boldsymbol{W}_4^1(\Omega)\big), \tag{6}$$

where $2s^{-1} + 3r^{-1} = 1$, $r > 3$, *then* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{E})$ *is unique in the class of weak solutions which satisfy* (6).

R E F E R E N C E S

1. *Saut J.-C.* Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Lectures on the Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations. Morningside Lectures in Mathematics. 2013. Vol. 3. P. 325–393.

V. A. Batishchev (Rostov-on-Don, Russia)
batishev-v@mail.ru

APPEARANCE OF FLUID ROTATION IN THE THERMOGRAVITATIONAL BOUNDARY LAYER NEAR THE FREE SURFACE

We study a thermogravitational flow of an inhomogeneous fluid in the horizontal layer of finite thickness, limited from above by a free surface and at the bottom by a solid boundary. The fluid flow is caused by the differential heating of the free surface. For the equations of fluid flow in Oberbeck-Boussinesq approximation we found a stationary axially symmetric self-similar solution describing the flow of fluid in the boundary layer near the free surface. The thermogravitational flow is calculated by both including a thermocapillary effect and excluding one. We offer a criterion when the Marangoni effect can be neglected in the thermogravitational boundary layer. Solutions to the problem are confirmed by numerical calculations in the case when the free surface near the line of symmetry is either heated or cooled relative to the average temperature of the fluid layer. We considered the cases when the velocity in the boundary layer is of the same order of magnitude as the velocity of the fluid outside the boundary layer or the external flow velocity is much less than the fluid velocity in the boundary layer.

Basic and secondary regimes are found by calculating the boundary value problem for a system of ordinary differential equations on a semiinfinite segment. We obtained the equation of branching in the boundary layer by reduction of the boundary value problem for the circumferential component of velocity to the Cauchy problem. In the absence of the Marangoni effect we obtained the bifurcation curve analytically. The coefficients of the equation of branching were found numerically. It is shown that there are only two secondary regimes of the fluid rotation. Around the point of bifurcation we constructed the asymptotics for rotational regimes of fluid flows.

Katica R. (Stevanovic) Hedrih,
Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts (SANU) e-mail: khedrih@sbb.rs

ADVANCES TO THEORY OF COLLISION OF TWO ROLLING RIGID BODIES: APPLICATION TO THE STUDY OF VIBRO-IMPACT DYNAMICS: * IN THE SYSTEMS WITH TRIGGER OF COUPLED SINGULAR POINTS IN PHASE PORTRAITS; * IN DYNAMICS OF ROLLING BALLS IN ELLIPTIC BILLIARDS

Advances to theory of collision of two rolling rigid bodies are presented. For first, an advance in kinematics of centric central collision of two rolling rigid bodies is formulated and illustrated by numerous graphical presentations of body rolling traces and impact and outgoing angular velocities before pre-and after post- collision kinematic states. For second, an advance in kinematics of skew collision of two rolling rigid bodies is formulated and illustrated by numerous graphical presentations of body rolling traces and impact and outgoing angular velocities before pre- and after post- collision kinematic states. Using Petrovic's theory presented in "Elements of mathematical phenomenology" and "Phenomenological mappings", on the basis of logic, qualitative

and mathematical analogies, new results in dynamics of collision of two rolling bodies are obtained and completes with advances in kinematics theory of collision is extended. In dynamics of collision of two rolling rigid bodies a theorem of conservation of the sum of angular momentums of two rigid bodies for corresponding momentary axis of rolling in kinetic states before pre- and after post- collision kinetic states is introduced. Also, new definition of coefficient of collision (restitution) is introduced by impact and outgoing angular velocities of the rolling bodies in kinetic collision states. Corresponding expressions outgoing angular velocities after collision are obtained. These results are proofed by elementary approach. Previous listed results of advances to theory of collision of two rolling rigid bodies, as main elements of dynamics – successive central collisions of two rolling bodies along curvilinear rolling traces are applied for investigation of the vibro-impact dynamics, as well as in the vibro-impact system with trigger of coupled singular points in corresponding phase portraits of body dynamics in phase planes.

Phenomena of impacts and collision on dynamics of rolling balls in elliptic billiards are analyzed and mathematically described. Difference between mathematical billiards [and real system of billiards is pointed out through results in geometry, kinematics and dynamics of different models of billiards.

А. О. Ватульян (Ростов-на-Дону, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ

Обратные задачи - относительно новый раздел математического моделирования, основная особенность задач которого состоит в определении причин по известным следствиям. В настоящем сообщении делается обзор по основным направлениям развития методов исследования обратных задач: ретроспективных, граничных, геометрических, коэффициентных и смешанных. Отметим, что первые два класса задач являются линейными, а остальные - нелинейными, причем всем классам присуща некорректность. Как правило, линейные классы приводятся к операторным уравнениям Фредгольма или Вольтерра первого рода и их регуляризованные решения находятся методом А. Н. Тихонова. Для геометрических обратных задач нелинейные операторные уравнения относительно неизвестной конфигурации строятся при помощи идей метода граничных уравнений или соотношений невзаимности. Для коэффициентных обратных задач при переменных коэффициентах построение операторных соотношений сопряжено со значительными трудностями и в этом случае используются итерационные схемы. Искомые переменные коэффициенты выбираются с учетом априорных ограничений, параметризуются и находятся из условий минимума некоторого неквадратичного функционала невязки. Далее формулируются линейные операторные соотношения и находятся поправки, после процесс повторяется.

В рамках представленного подхода получены слабые постановки для операторов эллиптического типа, сформированы итерационные схемы и решен ряд одномерных обратных задач для различных моделей механики деформируемого твердого тела - теории упругости и усложненных моделей (вязкоупругости, термоупругости, пороупругости, электроупругости, при наличии предварительного состояния).

Приведены результаты вычислительных экспериментов об определении одного или нескольких переменных коэффициентов для моделей простой структуры - стержней, балок, пластин, цилиндрических и слоистых структур, выявлены особенности динамического воздействия, обеспечивающие наилучшую реконструкцию искомых функций.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта16-01-00354 А) и Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1.

Yu. P. Virchenko, Pham Minh Tuan (Belgorod, Russia)
virch@bsu.edu.ru

SOLUTION BIFURCATION IN STOCHASTIC MODEL OF CHEMICAL REACTIONS

A stochastic model [1] of chemical reactions which takes into account thermal fluctuations of medium is studied. The time evolution of random concentration $\tilde{x}_t \in [0,1]$ of a reactant is described by the stochastic differential equation

$$d\tilde{x}_t = [\alpha - \tilde{x}_t + \lambda\tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t)]\,dt + \sigma\tilde{x}_t(1-\tilde{x}_t)d\tilde{w}_t\,,$$

with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha \in [0,1]$ and stochastic differential $d\tilde{w}_t$ which is understood in the Stratonovirch sense.

At $t \to \infty$ the nonuniform diffusion markovian random process has the final probability density function $p(x) = d\Pr\{\tilde{x}_t < x\}/dx$,

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\alpha-1}{1-x} - \frac{\alpha}{x}\right)\right\}\,,\ A = \text{const}.$$

The density $p(x)$ has the bifurcation when the parameters $\langle\lambda,\sigma^2,\alpha\rangle$ change. *The critical surface* divides different dynamical regimes in the parameters space. It is defined as the connected part of multicomponent surface that is given by the polynomial on the parameters $P(\lambda,\sigma^2,\alpha) = 0$ of the fourth order and the connected part is extracted by and the inequality

$$G_+(\lambda,\sigma^2,\varepsilon)G_-(\lambda,\sigma^2,\varepsilon) \geq 0\,, \quad \varepsilon = \alpha - 1/2$$

with $\deg G_\pm(\lambda,\sigma^2,\varepsilon) = 2$. The surface cross sections by planes $\varepsilon = \text{const}$ are calculated. They are placed outside the ellipse $4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 = 0$ and each of them has a "cusp" point lying on it. The coordinates $\langle\lambda_*(\varepsilon),\sigma_*^2(\varepsilon)\rangle$ of the cusp vertex is defined as the unique solution of equations $\lambda_* = -(9\varepsilon\sigma_*^2)/(1+2\sigma_*^2)$ and $4(\sigma_*^2-1)^3 = 27\sigma_*^2(1-4\varepsilon^2)$ with $\sigma_*^2 \in [1,4]$, $\varepsilon \in [-1/2,1/2]$. The

explicit form of the critical curve in polar coordinates, whose center is the vertex and the azimuthal axis parallels to the λ-axis is found.

R E F E R E N C E S

1. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Berlin, 2006.

B. O. Volkov (Moscow, Russia)
borisvolkov1986@gmail.com

LEVY LAPLACIAN AND SELF-DUAL YANG-MILLS EQUATIONS

We describe self-dual solutions of the Yang-Mills equations by means of Levy Laplacians. Let $\{e_n\}$ be an orthonormal basis in $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ such that $e_n \in C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$ for any $n \in \mathbb{N}$. Let f be two times Frechet differentiable function on $C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$. The value of the Levy Laplacian $\Delta_L^{\{e_n\}}$ associated with the basis $\{e_n\}$ on f is defined by

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f''(x)e_k, e_k > .$$

We introduce a class of orthonormal bases $\{e_n^T\}$ in $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ parameterized by the choice of a curve T in the group $SO(4)$. In [2] we prove that under some conditions on the curve T, a connection A in the trivial vector bundle with base $\mathbb{R}^4$ is a solution of the self-dual Yang-Mills equations $F = *F$, where F is the curvature corresponding to A, if and only if the parallel transport associated with A is harmonic for the Laplacian $\Delta_L^{\{e_n^T\}}$. This result is related to the result by Accardi, Gibilisco and Volovich on the relationship between the Levy Laplacian and the Yang–Mills equations. If a curve T is constant, then the Laplacian $\Delta_L^{\{e_n^T\}}$ coincides with the Levy Laplacian defined in [1]. For this operator the following holds. A connection A in the trivial vector bundle with base $\mathbb{R}^4$ is a solution of the Yang-Mills equations $D_A^* F = 0$, where D_A is the operator of covariant differentiation generated by A, if and only if the parallel transport associated with A is harmonic for such a Laplacian.

Finally, we consider an infinite dimensional divergence defined by analogy with the Levy Laplacian. We obtain an equation containing this divergence which is equivalent to the self-dual Yang-Mills equations. The resulting equation is analog of the equation of motion of chiral field.

R E F E R E N C E S

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians. // Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 2. No. 2. P. 235–250.

2. *Volkov B. O.* Levy Laplacians and instantons. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 290. P. 210-222.

И. В. Волович (Moscow, Russia)

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Квантовая динамика обычно задается при помощи решения уравнения Шредингера с самосопряженным гамильтонианом, либо, в более общем случае, при помощи группы автоморфизмов пространства состояний на C^*-алгебре наблюдаемых. Однако в приложениях встречаются гамильтонианы, которые являются симметрическими операторами, не допускающими самосопряженных расширений. Мы рассматриваем модельный пример такого дифференциального оператора на полуоси и производим его эллиптическую самосопряженную регуляризацию. Соответствующая группа унитарных операторов эволюции не имеет предела при снятии регуляризации в гильбертовом пространстве, однако доказывается существование предела для эволюции состояний на C^*-алгебре компактных операторов с присоединенной единицей. Интересным свойством построенной квантовой эволюции является то, что она переводит чистые (векторные) состояния в смешанные. Обсуждаются возможные применения полученных результатов к проблеме информационного парадокса в черных дырах. Доклад основан на совместной работе с В.Ж.Сакбаевым.

А. К. Гущин (МИАН, Москва, РФ)
akg@mi.ras.ru

НЕКАСАТЕЛЬНАЯ МАКСИМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ ЛУЗИНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для гармонических функций связь некасательной максимальной функции с другими характеристиками граничного поведения подробно изучена. В частности, известны оценки нормы в L_p некасательной максимальной функции через норму в том же пространстве интеграла площадей Лузина и естественные обобщения этого результата, см., например, [1]. Настоящий доклад посвящен изложению аналогичных утверждений для решений эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Оказалось, что в этой ситуации удобнее иметь дело с интегралом площадей не самого решения, а некоторой его степени. При естественных условиях установлены оценки (сверху и снизу) нормы в $L_p, p > 1$, некасательной максимальной функции решения u через соответствующую степень L_2-нормы интеграла площадей функции $|u|^{p/2}$. Эти исследования возникли в связи с изучением возможных постановок задачи Дирихле с граничной функцией из L_p. В связи с этим большое внимание уделяется условиям на коэффициенты уравнения: предполагается,

что внутри области они измеримы и ограничены, а на её границе непрерывны по Дини. Без последнего требования не справедлива теорема о единственности решения, см. [2]. Установленные оценки используются, кроме того, при обосновании справедливости в обсуждаемой ситуации аналога теоремы Карлесона—Хёрмандера, см. [3], [4]. Основные результаты доклада содержатся в работе [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А.

1. *Dahlberg B.E.J.* "Weighted norm inequalities for the Lusin area integral and the nontangential maximal functions for functions harmonic in a Lipschitz domain".// Studia Mathematica. 1980. V. 67. N 3. P. 297-314.

2. *Гущин А.К.* "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p".// Матем. сб. 2012. Т. 203. N 1. С. 137-156.

3. *Carleson L.* "An interpolation problem for bounded analytic functions".// Amer. J. Math. 1958. V. 80, P. 921–930.

4. *Hormander L.* "L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions"// Math. scand. 1967. V. 20. P. 65–78.

5. *Гущин А.К.* "L_p-оценки некасательной максимальной функции для решения эллиптического уравнения второго порядка."// Матем. сб. 2016; в печати.

Б. Н. Енгибарян, Н. Б. Енгибарян (Ереван, Армения)
b.yengibaryan@eif.am, yengib@instmath.sci.am

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается интегральное уравнение

$$f = g + \hat{K} f\,, \tag{1}$$

где $g \in L_1(0,r)$, а $\hat{K}$–интегральный оператор вида: $\hat{K}f(x) = \int\limits_0^r \lambda(x,t)T(x-t)f(t)dt$. Считается, что $T \in L_1(-r,r)$, а функция λ – ограничена на $(0,r)^2$ и обладает следующим свойством равномерной непрерывности по второму аргументу:

$$|\lambda(x,y) - \lambda(x,t)| \le \omega\left(|y-t|\right), \quad \omega(t) \to 0, \quad t \to 0+\,.$$

Простым примером такой функции λ может служить $\lambda(x,t) = \gamma(x)\lambda_0(x,t)$, где $\lambda_0 \in C\left([0,r]^2\right)$, $\gamma \in M(0,r)$. Частными случаями (1) являются: уравнение с полярным ядром, некоторые другие классы уравнений с ядрами типа потенциала, некоторые уравнения переноса излучения в неоднородной среде и др. Уравнение с полярным ядром достаточно подробно изучено в пространствах $C[0,r]$ и $L_2(0,r)$ (см. [1]). Имеем:

$$\|\hat{K}\|_{L_1} \le (\sup \lambda(x,t)) \int\limits_{-r}^{r} |T(x)|dx\,.$$

К уравнению (1) применяется метод усреднения ядра работы [2].

При произвольном $\delta > 0$, интервал $(0,r)$ можно разбить на конечное число промежутков $\Gamma = (G_k)_1^n$ таких, что

$$\int\limits_a^b |K(x,t) - K(x,y)|dx < \delta, \quad \text{при} \quad t,y \in G_m, \quad m = 1,\cdots,n.$$

В работе показано, что $\hat{K}$ вполне непреривный в $L_1(0,r)$ и допускает равномерную аппроксимацию конечномерными операторами с “ горизонтально полосатыми” ядрами вида

$$K_\Gamma(x,t) = K(x,\eta_m), \quad t \in G_m, \quad m = 1,\cdots,n,$$

где $\eta_m \in G_m$ произвольны. Применение такой аппроксимации сводит (1) к конечной линейной алгебраической системе, которая в ряде случаев допускает эффективное решение. Через это решение определяется приближенное аналитическое решение уравнения (1). Получена количественная оценка погрешности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A246.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1981.

2. *Барсегян А. Г., Енгибарян Н. Б.* Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера–Хопфа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55:5, С. 836–845.

Я. М. Ерусалимский (Ростов-на-Дону, Россия)
ymerusalimskiy@sfedu.ru

3-ПУТИ НА ГРАФЕ-РЕШЕТКЕ

Рассматривается бесконечный ориентированный граф, который мы будем называть графом-решеткой. Множество вершин этого графа — $Z_+ \times Z_+$. Из каждой вершины выходит две дуги. Одна — в ближайшую правую вершину, а другая — в ближайшую верхнюю.

Задача о попадании из вершины $(p; q)$ в вершину $(s; t)$ равносильна задаче о попадании изначала координат в вершину $(s - p;\ t - q)$.

Каждый путь из вершины $(0; 0)$ в вершину $(n - m; m)$ будем кодировать n-разрядным двоичным числом, содержащим m единиц и $n - m$ нулей. Единица, стоящая на i-ом месте (нумерация мест слева на право), означает, что на i-ом шаге путь проходит по вертикальной дуге, а ноль, стоящий на i-ом месте, означает, что на i-ом шаге путь проходит по горизонтальной дуге. Будем рассматривать достижимость по 3-путям. Для этого дадим некоторые определения.

Определение 1. *Начальным 1-фрагментом пути длины k будем называть его отрезок, состоящий из k вертикальных дуг и имеющий кодировку вида* $(1 \ldots 10\ )$. *Здесь за многоточием «спрятаны» единицы, «пробельная» зона заполнена произвольным набором нулей и единиц.*

Определение 2. *Внутренним 1-фрагментом пути длины k будем называть такой отрезок пути, который состоит из k вертикальных дуг и имеющий кодировку вида* $(\ 01 \ldots 10)$.

Определение 3. *Путь называется 3-путем, если его начальный 1-фрагмент и все внутренние 1-фрагменты имеют длину кратную* 3.

Решена задача о количестве 3-путей, ведущих из начала координат в вершину $(n - m; m)$. Найдена вероятность перехода за n шагов из начала координат в вершину $(n - m; m)$ по 3-путям (вероятности перехода по дугам равны $\frac{1}{2}$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян.* Графы с нестандартной достижимостью. // Задачи, приложения. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.

2. *Я. М. Ерусалимский.* Случайные блуждания по графу-решетке и комбинаторные тождества. // Инженерный вестник Дона, № 2 ч. 2 (2015). ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2964

V. V. Zharinov (Moscow, Russia)
zharinov@mi.ras.ru

ON THE BÄCKLUNND TRANSFORM OF THE GAUGE FIELDS

Bäclund transforms, i.e. differentially related pairs of differential equations, are described in the coordinate manner appropriate for calculations and applications. Here we present Bäclund transforms for gauge fields in the Minkowski space of an arbitrary dimension.

Figuratively speaking, Bäclund transform is a differential relation between two differential equations (i.e., two systems of nonlinear partial differential equations). Originally such construction appeared in the A.V. Bäclund studies of surfaces of a constant curvature. In the language of differential equations it is formulated as the differential relation between two copies of the sine-Gordon equation (see [1] for more detail). Since there Bäclund transforms have numerous applications in physics, geometry and differential equations. From the point of view of the algebra-geometrical approach to differential equations (see [2], for example) Bäclund transforms are a special case of the systems with constraints [3], and due to this speciality they deserve a special treat. Previously [4], an appropriate coordinate-free description of this situation was presented. This description gives an exact and clear understanding of Bäclund transforms and their place in the algebra-geometrical approach, but it is not convenient for actual calculations and applications. Here the situation is described in a fixed coordinate system and illustrated by Bäclund transforms for gauge fields in the Minkowski space of an arbitrary dimension.

R E F E R E N C E S

1. *Ибрагимов Н. Х.*, Группы преобразований в математической физике. Наука, Москва, 1983. English transl., Transformation groups applied to mathematical physics, Riedel, Dordrecht, 1985.

2. *Zharinov V. V.*, Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1992.

3. *Zharinov V. V.*, Conservation laws, differential identities, and constraints of partial differential equations, Theoret. and Math. Phys., 185:2 (2015), 1557–1581.

4. *Zharinov V. V.*, On Bäclund correspondences, Math. USSR-Sb., 64:1 (1989), 277-293.

М. И. Карякин, О. Г. Пустовалова (Ростов-на-Дону, Россия)
karyakin@sfedu.ru, ogpustovalova@sfedu.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗГИБА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПАНЕЛИ

В работе описано применение метода разложения решения по параметру для исследования эффектов второго порядка в задаче о больших деформациях чистого изгиба нелинейно-упругой панели. Материал панели предполагается сжимаемым и неоднородным по толщине. В простейшем случае неоднородность связана с переменным характером модуля сдвига, в более сложных – переменными являются все материальные параметры. Основная цель исследования состояла в изучении влияния параметров неоднородности на напряженно-деформированное состояние панели и ее устойчивость.

Трехмерная краевая задача о равновесии плиты с помощью полуобратного метода [1,2] сводится к нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции, описывающей изменение толщины панели. Генерирование нелинейных краевых задач, а также исследование разложений их решений осуществлялись с использованием системы автоматизации полуобратного метода нелинейной теории упругости [3], реализованной в рамках системы аналитических вычислений Maple.

В работе рассмотрено несколько видов непрерывной неоднородности (линейная, полиномиальная, экспоненциальная), а также случай кусочно-непрерывных характеристик, в том числе моделирующих эффекты тонких покрытий на внешней или внутренней поверхности панели. Для описания механических свойств материалов при больших деформациях использованы общеупотребительные модели сжимаемых нелинейно-упругих сред.

R E F E R E N C E S

1. *Карякин М. И., Сухов Д. Ю., Шубчинская Н. Ю.* Об особенностях чистого изгиба упругой панели при больших деформациях // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2012. № 4. С. 69–75.

2. *Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N.* Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel // Int. Journal of Eng. Science. 2014. V. 80. P. 90–105.

3. *Gavrilyachenko T. M., Karyakin M. I., Sukhov D. Y.* Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple //Proc. Int. Conf. Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008) P. 284–291

S. G. Konstantinou-Rizos (Grozny, Russia)
skonstantin84@gmail.com

EXTENSIONS OF YANG-BAXTER MAPS ON GRASSMANN ALGEBRAS

In this talk, we present the first steps towards extending the theory of Yang-Baxter maps in the case of Grassmann algebras. We construct some novel endomorphisms between Grassmann extensions of algebraic varieties which possess the Yang-Baxter property. As an illustrative example, we use the well-celebrated Adler map. Then, we consider the cases of the nonlinear Schrödinger (NLS) equation and the derivative NLS equation, and we make use of their associated Darboux transformations to derive ten-dimensional maps which can be restricted to eight-dimensional Yang-Baxter maps on invariant leaves.

R E F E R E N C E S

1. *Konstantinou-Rizos S. and Mikhailov A. V.* Anticommutative extension of the Adler map. // Journal of Physics A 2016. Vol. 49. P. 30LT03.

2. *Grahovski G. G., Konstantinou-Rizos S. and Mikhailov A. V.* Grassmann extensions of Yang-Baxter maps. // Journal of Physics A 2016. Vol. 49. P. 145202.

Л. Н. Ляхов, С. А. Рощупкин (Воронеж, Елец, Россия)
levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА-КАТРАХОВА И B-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Многомерным *оператором Киприянова-Катрахова* смешанного типа с символом $a(x;\xi)$ назовем оператор, действующий на функции из $S(R_N)$ по формуле
$\mathcal{F}_B[Au](\xi) = \int_{R_N} \mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\, e^{-i(x',\,\xi')}\, a(x;\xi)u(x) \prod_{i=1}^n (x_i^2)^{\gamma_i/2} dx.$

Для любого вещественного числа s через $H_\gamma^s(R_N)$ обозначим
класс функций $u{\in}H_\gamma^s\ :\ \{\|u\|_{s,\gamma}^2{=}\int(1{+}|\xi|^2)^s\,|\mathcal{F}_B[u](\xi)|^2\,(\xi')^\gamma\,d\xi\}$. Канонический сингулярный псевдодифференциальный оператор A с символом порядка однородности m имеет порядок m в H_γ^s: $\|Au\|_{s,\gamma} \le C\|u\|_{s+m,\gamma}$ (см. [1]).

Пусть A — сингулярный псевдодифференциальный оператор с символом $a(x;\xi) \in \Xi_q^m$. Оператор A назовем B-эллиптическим в точке $x \in \mathbb{R}_N$ если $a(x;\xi) \ne 0$ при $\xi \ne 0$ и B-эллиптическим в $\mathbb{R}_N$, если он B-эллиптичен в каждой точке $x \in \mathbb{R}_N$. Символ B-эллиптического оператора (в точке x или в $\mathbb{R}_N$) назовем B-эллиптическим символом (соответственно в точке x или в $\mathbb{R}_N$).

Ограниченные операторы R_1 и R_2, действующие из пространства H_γ^{s-m} в H_γ^s назовем соответственно левым и правым квазирегуляризатором оператора A, если $R_1A = I + T_1, \quad A_2R_2 = I + T_2\,,$ (1) где T_1 — ограниченный оператор из H_γ^{s-1} в H_γ^s, а T_2 — ограниченный оператор из H_γ^{s-m} в H_γ^{s-m+1}.

Замечание 1. *Регуляризаторы эллиптических операторов определяются как обращающие с точностью до вполне непрерывного оператора. Квазирегуляризаторы (1) не являются регуляризаторами из-за некомпактности* $\mathbb{R}_N$

Теорема 1. *$\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператор R с символом $r(x;\xi) = |\xi|^m(1+|\xi|^m)^{-1}a^{-1}(x;\xi)$ является (левым и правым) квазирегуляризатором для B-эллиптического в $\mathbb{R}_N$ $\mathcal{F}_B$-с.п.д. оператора A с символом*
$a(x;\xi) \in \Xi_q^m$.

Заметим, что в случае $m = 0$ с.п.д. оператор R с символом $a^{-1}(\xi)$ является обратным к сингулярному псевдодифференциальному оператору A с символом $a(\xi)$, не зависящим от x.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47, № 5. С. 681–695.

А. В. Манжиров, К. Е. Казаков
manzh@inbox.ru

УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ И ТРИБОЛОГИИ

Рассматриваются интегральные уравнения с несколькими интегральными операторами и быстро изменяющимися функциями. В частности, исследуются уравнения с одним компактным оператором и двумя различными операторами Вольтерра. Множитель при внеинтегральном члене, а также правая часть уравнения задаются быстро изменяющимися функциями.

Предлагается конструктивный проекционный метод, позволяющий получить аналитическое решение уравнения в рядах теоретически с любой наперед заданной степенью точности. При помощи данного метода удается решить две основные проблемы. Во-первых, избежать решения бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра (к которой приводят известные методы), а решать последовательность независимых интегральных уравнений Вольтерра. Во-вторых, выделить в решении в явном виде обе заданные быстро изменяющиеся функции. В результате для решения рассматриваемого интегрального уравнения с высокой точностью достаточно удержать небольшое число членов разложения. Заметим, что другие известные в настоящее время методы приводят к ошибкам, достигающим 100%.

Исследуемые интегральные уравнения возникают, в частности, в прикладных контактных задачах и задачах износа. Они позволяют учесть такие особенности деформируемых тел, как наличие покрытий, их сильную неоднородность, вызванную особенностями технологических процессов, сложный рельеф поверхности взаимодействующих тел, а также изменение этого рельефа в процессе износа.

Теоретические результаты сопровождаются примерами решения прикладных задач. Проводится сравнительный анализ данных расчетов, полученных различными методами.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект №14-19-01280).

I. V. Maresin (Moscow, Russia)
qq@irccity.ru

CELESTIAL GEOMETRY OF LORENTZIAN MANIFOLDS

The presentation will discuss structures on the six-dimensional *bundle of skies* $\mathfrak{S}X$ of a Lorentzian manifold X, as well as on the five-dimensional twistor space $\mathfrak{N}$, a quotient space of $\mathfrak{S}X$. The definition of a *conformal reference frame* is given, that is, of a special projection of $\mathfrak{S}X$ (or $\mathfrak{N}$) to a three-dimensional manifold. An example is constructed—conformal compactification—for the Minkowski space. The *celestial transform* of Lorentzian vectors is defined, a kind of spinor correspondence, based on the complex structure on the skies. An 1-form generating the contact structure on $\mathfrak{N}$ (when the latter is smooth) is expressed explicitly as a line bundle-valued form.

See some details at http://course.irccity.ru/celestial/

R E F E R E N C E S

1. *Maresin I. V.* Conformal reference frames for Lorentzian manifolds // arXiv:1605.07070

A. N. Markovsky (Krasnodar, Russia)
mark@kubsu.ru

DIRECT SUM OF POLYHARMONIC SUBSPACES

Shifts systems of fundamental solutions of polyharmonic equations are considered; completeness of these systems in appropriate polyharmonic subspaces is proved; the sufficient condition of the completeness is represented and examples when this condition is unfulfilled are given. The fullness of harmonic systems is proved in [1].

We consider the space of real-analytic functions summable with a square in a bounded domain with smooth boundary and its decomposition into the direct sum of polyharmonic subspaces; some particular cases of this decomposition was considered in [2–3].

R E F E R E N C E S

1. *Lezhnev A. V., Lezhnev V. G.* Method of basis potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics. Krasnodar: Kuban State University, 2009.

2. *Karachik V. V.* On One Representation of Analytic Functions by Harmonic Functions // Siberian Adv. Math., 18:2 (2008), 103–117.

3. *Ramazanov A.-R. K.* Representation of the space of polyanalytic functions as a direct sum of orthogonal subspaces // Math. Notes, 66:5 (1999), 613–627.

Н.Г.Марчук (Москва, Россия)
nmarchuk@mi.ras.ru

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Предлагается конструкция обобщенных алгебр Клиффорда второго порядка, в которых генераторы распадаются на две группы – коммутирующие между собой и антикоммутирующие между собой. Рассматриваются тензорные произведения алгебр Клиффорда. Показано, что тензорное произведение алгебр Клиффорда четной размерности снова является алгеброй Клиффорда четной размерности, т.е., класс таких алгебр Клиффорда замкнут относительно операции тензорного произведения. Доказано, что предложенный класс обобщенных алгебр Клиффорда второго порядка тоже замкнут относительно операции тензорного произведения. Рассмотрен пример использования обобщенный алгебр Клиффорда в модифицированных уравнениях Ланцоша описывающих электрослабые взаимодействия элементарных частиц.

Е. Н. Михалкин (Красноярск, Россия) [5]
mikhalkin@bk.ru

О монодромии решения общего алгебраического уравнения

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y - 1 = 0. \tag{1}$$

Известно, что дискриминантное множество ∇ уравнения (1) допускает параметризацию Горна-Капранова $\Psi : \mathbb{CP}^{n-2}_s \to \mathbb{C}^{n-1}_x$ по формуле

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s\rangle}\left(-\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \;\; k = 1, \ldots, n-1; \;\; s \in \mathbb{CP}_{n-2}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha = (n-1, \ldots, 2, 1)$ и $\beta = (1, 2, \ldots, n-1)$ – целочисленные векторы, а $\langle\, , \rangle$ – знак скалярного произведения.

Определим для $\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle} > 0$, $s \in \mathbb{RP}_{n-2}$ ветви параметризации (2) условием

$$\Psi^{(j)}_k(s) = e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)}\frac{ns_k}{\langle \alpha, s\rangle}\left(\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \;\; k = 1, \ldots, n-1,$$

где в качестве радикала степени $\frac{k}{n}$ берется арифметическое значение, а j принимает значения $0, 1 \ldots, n-1$. Назовем *«струной»* поверхность

$$\mathcal{S}^{(j)} := \{\Psi^{(j)}(s) : \; s \in \mathbb{R}^{n-1}_+\} \subset \nabla, \;\; j = 0, \ldots, n-1.$$

Область сходимости D гипергеометрического ряда (сходящегося в окрестности $x = 0$), представляющего решение уравнения (1), примыкает к дискриминантному множеству ∇ по части границы ∂D, состоящей из n определенных выше «струн» $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \ldots, \mathcal{S}^{(n-1)}$.

Основным результатом доклада является следующая теорема, описывающая характер ветвления решения $y(x)$ уравнения (1) при продолжении из области D вокруг «струн».

Теорема 1. *При продолжении через границу ∂D области D всякая ветвь $y_j(x)$ решения уравнения (1) имеет ветвление лишь в паре «струн» $\mathcal{S}^{(j)}$ и $\mathcal{S}^{(j-1)}$, причем второго порядка.*

A. B. Morgulis (Rostov-on-Don, Russia)
morgulisandrey@gmail.com
K. I. Ilin (York, UK)

STABILITY SPECTRA OF THE OPEN FLOWS OF INCOMPRESSIBLE FLUID

This communication is concerned with the open flows. By definition, such flow is confined within some domain through which the total mass flux is not equal to zero. In turn, the mass flux can supply the energy and vorticity to the flow and withdraw them from it. This interplay sometimes turns out to be capable of producing a kind of dissipation which persists even in the limit of vanishing viscosity. In particular, some inviscid open flows can be 'stable' in the sense that their spectra are not just neutral but consist of complex numbers the real parts of which are strictly negative. Plenty of such flows does exist in the finite planar channels, provided it is supposed that the perturbations are planar too and the governing equations are endowed with the Yudovich boundary conditions [1-3]. This communication is focused upon the different flow geometry. Namely, we consider the flows confined within two topologically equivalent surfaces such as planes, or cylinders, or spheres, or tori, and more common boundary conditions for the flow velocities. In addition, the velocity is supposed to be transversal to the boundary everywhere. For such flows we'll cover 3D stability issues as well as the asymptotic of high Reynolds number (which is defined with the use of the total mass flux). The flows introduced in [4] will be discussed in detail.

R E F E R E N C E S

1. *Morgulis A. B., Yudovich V. I.* Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary//Chaos. 2002. V. 12. P.356-371.

[5]работа поддержана грантом Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), а также грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

2. *Govorukhin V. N, Morgulis A. B., Vladimirov V. A.* Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity//Journ. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 420-472.

3. *Morgulis A. B.* Non-linear Asymptotic Stability for the Through-Passing Flows of Inviscid Incompressible Fluid//Asymptotic Analysis. 2010. V. 66. P. 229-247.

4. *Fujita, H., Morimoto H., Okamoto H.* //Math. Methods Appl. Sci. 1997. Vol. 20, no. 11. P. 659-678.

И. В. Моршнева
(Ростов-на-Дону)
morsh@math.sfedu.ru

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ

Рассматривается задача о возникновении пространственных конвективных периодических по времени течений в горизонтальном слое жидкости с примесью. Границы слоя предполагаются свободными, изотермическими, и концентрация примеси на каждой из них считается заданной. Уравнения движения имеют стационарное (основное) решение, соответствующее покоящейся смеси, в предположении, что градиенты температуры и концентрации постоянны и вертикальны. Известно, что, в отличие от случая чистой среды, в бинарной смеси возможны два вида неустойчивости основного решения — монотонная и колебательная.

В данной работе изучается возникновение автоколебания при колебательной потере устойчивости основного режима относительно пространственных возмущений, периодических по однородным переменным и удовлетворяющих некоторым условиям четности. Для исследования применяется метод Ляпунова-Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича [1], [2]. Показано, что возможно как мягкое возникновение автоколебательного режима, так и жесткая потеря устойчивости основного режима, вызванная тем, что оно сливается с возникшим при докитическом значении параметра неустойчивым автоколебательным режимом. Для автоколебательного режима найдены первые два члена ряда по степеням параметра надкритичности. Получены аналитические выражения для амплитуды и частоты колебаний. Даны достаточные условия докритического и сверхкритического ветвления автоколебания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. матем. и мех. 1971. Т. 35, № 4. С. 638–655.

2. *Юдович В. И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикл. матем. и мех. 1972. Т. 36, № 3. С. 450–459.

K. A. Nadolin, I. V. Zhilyaev (Rostov-on-Don, Russia)
nadolin@math.sfedu.ru

ONE MATHEMATICAL MODEL FOR STUDYING A PASSIVE ADMIXTURE TRANSPORT IN SHALLOW AND WEAKLY-CURVED NATURAL WATERCOURSE

Main goal of the study is to provide simplified 3D mathematical model for admixture spreading process in shallow shear flow and to analyse and to test it.

This model is oriented to the geomechanics problems, so it can be applied to natural streams like rivers. The distinctive feature of such watercourses is a considerable difference in sizes of their length, width and depth. For example, the ratio between the characteristic depth and width for a typical lowland river varies from 1:10 to 1:200.

The formulation of the problem is as follow. A passive admixture spreads in an open turbulent flow of incompressible viscous fluid in some section of river. The river-bed is assumed known and weakly curved. Also the stream is assumed lengthy and shallow. So, the geometry of the considered part of the stream can be described by known functions smooth enough. Also the length of this section of a channel is large with respect to its width, and the width of this section is large with respect to its depth.

The admixture is assumed passive and its decay and diffusion are taken into account. The passivity of admixture means that the mathematical model of the process splits into two subsystems of equations. The first one – the “hydrodynamic subsystem” – allows to find the velocity field in fluid, and the second one – the “concentration subsystem” – allows finding the concentration of admixture in the stream with known velocity field.

The numerical results show that this reduced 3D model adequately describes the spreading processes in natural streams. It provides acceptable accuracy and allows the improvements by means of applying the recurrent correction procedure.

The reduced 3D model takes into account the cross-structure of a stream. This is a strong particular feature of the proposed models. That allows us to study the admixture spreading in a channel with varying width and depth more accurate than by utilizing the on-depth-averaged models. For example, we can catch the phenomenon of occurrence the opposite flow in a near-surface region, which may be caused e.g. by means of the wind action.

А. К. Назаров (г. Ростов-на-Дону, Россия)
arturnazarov7@mail.ru

ПОЛНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Рассматривается задача с начальным условием для системы m дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, зависящих от большого параметра $\omega >> 1$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\eta_j(x,t,\omega t)\right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$u(x,0) = g(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^*$ - искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t. При определенных условиях разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решений, который базируется на классическом методе усреднения Крылова-Боголюбова, методе двухмасштабных разложений. Нахождение коэффициентов асимптотики сводится, по существу, к решению конечного числа не зависящих от асимптотического параметра однозначно разрешимых задач Коши для систем линейных уравнений в частных производных 1-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. К.* Усреднение уравнений в частных производных первого порядка // Эколог. вестник науч. центров ЧЭС. 2015. №4. С. 62-68.

2. *Капикян А. К., Левенштам В. Б.* Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 11. С. 2024–2041.

В. Г. Николаев (Великий Новгород, Россия)
vg14@inbox.ru

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть комплексная $n \times n$ матрица J не имеет вещественных собственных чисел.

Аналитической по Дуглису (*или J-аналитической с матрицей J*) называется комплексная n-вектор-функция $\phi(z) \in C^1(D)$, для которой в плоской области D выполнено уравнение $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$.

Рассмотрим для J-аналитических функций следующую граничную задачу Шварца [1].

Пусть конечная односвязная плоская область D ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_{\Gamma} = \varphi(t),$$

где вещественная граничная вектор-функция $\varphi(t) \in C(\Gamma)$ задана.

Имеют место две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \partial D$ — контур Ляпунова, а для граничной функции $\varphi(t)$ выполнено условие Гельдера: $\varphi(t) \in H^{\sigma}(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$. Пусть матрица J имеет вид $J = QJ_1Q^{-1}$, где*

$$Q = \left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right), \ \overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{C}^3, \quad \overline{y} \in \mathbb{R}^3, \quad J_1 = \operatorname{diag}\left(\lambda, \mu, \lambda\right), \quad \operatorname{Im}\lambda, \mu \neq 0.$$

Тогда решение задачи Шварца в области D существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma = \partial D$ — контур Ляпунова, и для производной граничной функции $\varphi(t)$ выполнено условие Гельдера: $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \in H^{\sigma}(\Gamma)$, $0 < \sigma < 1$. Пусть матрица J имеет вид $J = QJ_1Q^{-1}$, где*

$$Q = \left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right), \ \overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{C}^3, \quad \overline{y} \in \mathbb{R}^3, \quad J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Тогда решение задачи Шварца в области D существует и единственно с точностью до вектор-постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаев В. Г., Солдатов А. П.* О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова. // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, No 7. С. 965–969.

М. В. Норкин (Ростов-на-Дону, Россия)
norkinmi@mail.ru

ОБРАЗОВАНИЕ КАВЕРНЫ ПРИ БЫСТРОМ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВОЗМУЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Кавитационный отрыв жидкости от тела возникает в ряде практических задач морской и корабельной гидродинамики: проникание тел в жидкость; удар, разгон или торможение твердых тел, плавающих на поверхности жидкости или полностью в нее погруженных; установившееся движение тел в жидкости с большими скоростями; вибрация твердых тел в жидкости. В настоящей работе рассматривается торможение твердого тела в возмущенной жидкости, когда его скорость уменьшается по линейному закону (плоская задача). При больших ускорениях тела возникают области низкого давления вблизи его границы и образуются присоединенные каверны. Для определения форм каверн на малых временах формулируется смешанная краевая задача теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. Существенное влияние на отрыв оказывают безразмерное ускорение цилиндра, числа Фруда и кавитации, а также возмущенное состояние жидкости в начальный момент времени. Отметим, что промежуток времени на котором происходит процесс торможения цилиндра уменьшается при увеличении ускорения цилиндра. В предельном случае бесконечно большого ускорения приходим к задаче о мгновенной остановке тела в жидкости (скорость тела резко падает до нуля, происходит удар плавающего тела). При этом неизвестные заранее первоначальные зоны контакта и отрыва $S_{11}(t_*)$ и $S_{12}(t_*)$ определяются на основе решения следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \quad R \in \Omega(t_*); \quad u = 0, \quad y = H + \xi_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -n_x, u \leqslant 0, \quad R \in S_{11}(t_*); \qquad \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant -n_x, u = 0, \quad R \in S_{12}(t_*)$$

где $\Omega(t_*)$ – область, занятая жидостью в момент остановки $t = t_*$; $\xi_0(x)$ – возмущение внешней свободной границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Норкин М. В.* Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением. // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.

2. *Норкин М. В.* Начальный этап движения эллиптического цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2012. Т. 52, № 2. С. 319–329.

С. Н. Овчинникова, О. А. Прозоров (Ростов-на-Дону)
ovch.09@mail.ru, oaprozorov@gmail.com

РЕЗОНАНСНЫЕ РЕЖИМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 (РЕЗОНАНС RES 5) В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА

Задача Куэтта-Тейлора о течение жидкости между вращающимися цилиндрами описывается системой уравнений Навье-Стокса, которая обладает цилиндрической симметрией и зависит от нескольких вещественных параметров. При любых значениях параметров у нее существует точное решение — течение Куэтта. В эксперименте оно исчезает при некоторых критических значениях параметров, которые определяют точку пространства параметров (точку элементарной бифуркации), когда линеаризованная на течении Куэтта система Навье-Стокса имеет ненулевые решения (нейтральные моды). Кроме того, существуют точки бифуркации высоких коразмерностей, которым отвечает более двух независимых нейтральных мод. Поведение системы Навье-Стокса в малой окрестности таких точек можно описать нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Для невращательно симметричных решений найдено шесть типов точек бифуркации коразмерности 2 (резонансы Res 0—Res 5), которым отвечают невырожденные амплитудные системы, отличающиеся друг от друга дополнительными резонансными слагаемыми. Некоторые решения амплитудных систем находятся на инвариантных подпространствах пространства амплитуд, им отвечают резонансные режимы системы Навье-Стокса.

Точки Res 5 найдены при вращении цилиндров в противоположные стороны, для них рассчитаны коэффициенты соответствующих амплитудных систем и проведен численный анализ условий существования и устойчивости их решений на инвариантных подпространствах. В точках Res 5 перестают быть инвариантными одно из подпространств со спиральными и азимутальными волнами и подпространство с двойными спиральными волнами одного из семейств.

Р. В. Пальвелев (Москва, Россия)
palvelev@mi.ras.ru

РАССЕЯНИЕ ВИХРЕЙ В АБЕЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ ХИГГСА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Абелевы модели Хиггса на римановых поверхностях являются обобщениями хорошо известной (2+1)-мерной абелевой модели Хиггса на плоскости, возникающей в теории сверхпроводимости.

Все статические решения модели на плоскости с данным значением топологического заряда представляют собой минимумы потенциальной энергии и являются решениями некоторой системы уравнений первого порядка (вихревых уравнений). Решения вихревых уравнений с зарядом (вихревым числом) N называются N-вихрями. Пространство модулей (то есть классов калибровочной эквивалентности) N-вихрей представляет собой N-ю симметрическую степень двумерной плоскости $S^N\mathbb{R}^2$.

Функционал кинетической энергии в модели на плоскости определяет на пространстве модулей N-вихрей риманову метрику, называемую кинетической метрикой. Н. Мэнтон в 1982 году высказал так называемый адиабатический принцип, согласно которому геодезические кинетической метрики на пространстве модулей N-вихрей могут служить приближениями к «медленным» динамическим решениям модели с топологическим зарядом N. Для абелевой модели Хиггса на

плоскости адиабатический принцип был строго обоснован лишь в последние годы. Изучение геодезических на пространствах модулей N-вихрей позволяет получать результаты о движении вихрей.

В моделях на компактных римановых поверхностях пространства модулей статических решений также представляют собой конечномерные многообразия, а их размерность определяется числом Черна соответствующего линейного расслоения над поверхностью. Функционал кинетической энергии снова задает метрику на пространстве модулей статических решений.

Предполагается, что аналог адиабатического принципа выполняется и в моделях на компактных римановых поверхностях (хотя в настоящее время доказательство получено лишь для некоторых частных случаев). Используя геодезическое приближение, можно получить результаты о движении вихрей на римановых поверхностях, которые аналогичны соответствующим результатам для модели на плоскости.

D. S. Roshal, A .E. Myasnikova (Rostov-on-Don, Russia)
rochal.d@yandex.ru

MATHEMATICAL MODELING OF SELF-ASSEMBLY OF 2D NANO-OBJECTS WITH SPHERICAL TOPOLOGY

Large variety of physical and biological objects are composed of structural units forming curved 2D crystals with a local hexagonal order. Similar structural arrangements are found in pollen grains, insects eyes, silicon skeletons of unicellular algaes, viral capsids, colloidal systems [1-4], multi-electron bubbles in superfluid helium, fullerenes and nanotubes. Most of this materials are very interesting for scientists. Structure of some of them haven't understood completely yet.

In our work the self-assembly of 2D crystals with spherical topology is modeled [1-4]. The particles are retained on the curved surface and interact with each other by means of repulsive potential. The physical mechanism reducing the number of defects in the 2D spherical colloidal crystals is proposed. Improvement of the structure is carried out by successive cycles of particle implantation and subsequent relaxation of the crystal. The particles coordinates are obtained using the overdamped dynamics method[4].The mechanism is potentially suitable for producing colloidosomes[1] with similar pore sizes, which may improve selectivity of nanocontainers permeability. The developed approach also allows to simulate 2D conical and tubular nanocrystals with minimum number of topological defects, including the various possible polymorphs HIV capsids.

D. R. gratefully acknowledge financial support of Russian Science Foundation, grant number 15-12-10004.

R E F E R E N C E S

1. *Roshal D.S.* Formation of square order areas on the colloidosome surface // Journal of the Solid State. 2013. Vol. 55, No. 10, P. 2128-2131.

2. *Roshal D.S., Petrov K.Yu., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* Extended topological defects as sources and outlets of dislocations in spherical hexagonal crystals // Physics Letters A. 2014. T. 378. P. 1548-1552.

3. *Roshal D.S., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* Slightly broken icosahedral symmetry advances Thomson problem // Physics Letters A. 2015. T. 379. P. 372-376.

4. *Roshal D.S., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* Relaxation of interstitials in spherical colloidal crystals //Physica E. 2016. T. 75. P. 295-301.

А. П. Солдатов (Белгород)
your@email.com

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ С ОДНОРОДНО -РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассматриваются в области D комплексной плоскости двумерные сингулярные интегралы вида

$$\psi(z) = \int_D Q_2(t, t-z)\varphi_2(t)d_2t,\ z \in D,$$

и обобщенные интегралы типа Коши

$$\phi(z) = \int_\Gamma Q_1(t, t-z)\varphi_1(t)d_1t,\ z \in D,$$

где ядро $Q_k(t,\xi)$ однородно степени $-k$ по переменной $\xi \in \mathbb{C}$ и кривая $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Подобные интегралы возникают при исследовании эллиптических краевых задач.

Обсуждаются условия, обеспечивающие принадлежность функций ϕ и ψ классу Гельдера $C^\mu(\overline{D})$. Рассмотрен также случай интегралов с L^p плотностью. Даны приложения к задаче Римана- Гильберта для эллиптической системы первого порядка с непрерывными коэффициентами.

А. М. Столяр (Ростов-на-Дону, Россия)
ajoiner@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В работе рассматриваются начально-краевые и краевые задачи, описывающие колебания или изгиб упругих и упругопластических узких изотропных и ортотропных цилиндрических панелей/пластин и сферических оболочек. Проводится асимптотическое и численное интегрирование соответствующих линейных и нелинейных уравнений математической физики [1, 2]. Асимптотическое интегрирование линейных и нелинейных уравнений типа Кармана [1, 3], в случае упругого поведения оболочки, проводится при помощи метода малого параметра совместно с методом пограничного слоя. Решение строится в виде рядов по степеням малого параметра. В качестве малого параметра δ принимается отношение длин смежных сторон панели. Коэффициенты первого ряда определяются в ходе первого итерационного процесса подстановкой этого ряда в уравнения, начальные и граничные условия и собиранием коэффициентов при одинаковых степенях δ. Находятся главные члены разложения, которые удовлетворяют уравнениям меньшей размерности по пространственным переменным, описывающим изгиб или колебания соответствующих оболочечных элементов. Для определения последующих членов асимптотики необходимо решать линейные бигармонические уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты второго ряда — функции пограничного слоя. Для исследования поведения упругопластических панелей и оболочек применяются модифицированные соотношения деформационной теории пластичности. Приводятся результаты численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Столяр А. М.* Поведение узких панелей и сферических оболочек в условиях статического и динамического нагружения. Асимптотический и численный анализ. Ростов-на-Дону, 2014.

2. *Столяр А. М., Муталибов Г. С.* Асимптотический и численный анализ задач статики и динамики пластинок, оболочек и тросов. В сб. докл. XI Всерос. съезда по фунд. проблемам теор. и прикл. механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань, 2015. С. 3610–3612.

3. *Finiukova V. O., Stolyar A. M.* Asymptotic Integration of One Narrow Plate Problem // Advanced Structured Materials. Vol. 7, Shell-like structures – Non-classical Theories and Applications. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2011. P. 53–62.

H. S. Sukiasyan (Yerevan, Armenia)
haik@instmath.sci.am

AN EXTREMAL PROPERTY OF DELAUNAY TRIANGULATION AND ITS APPLICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS

The popular method for numerical solution of some problems of mathematical physics is the finite elements method. This method needs a mesh of triangles. The convergence rate of iteration process of numerical solution of the problem by the finite elements method depends on geometrical configuration of the mesh.

We prove the following extremal property: Let M be a triangular mesh with set of knots K. Denote by $S(M)$ the sum of cotangents of interior angles of all triangles from M.

Theorem 1. *For any fixed set of knots K, the sum $S(M)$ as a function on mesh M reaches his minimum for Delaunay triangulation.*

Using this extremal property, the theorem is obtained, that for any fixed knots set, for numerical solution of Maxwell equation of magnetic field the optimal mesh is Delaunay triangulation.

П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова, Ю. А. Тамарова (Ульяновск, Россия)
velmisov@ulstu.ru, farbless@gmail.com, kazakovaua@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Предложены асимптотические разложения для потенциала скорости, на основе которых выводятся асимптотические уравнения газовой динамики для безвихревых изэнтропических течений газа. Приведем эти уравнения для первого приближения потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$.

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}). \tag{3}$$

Здесь и далее индексы снизу обозначают частные производные, V, a - скорость газа и скорость звука в однородном потоке. Уравнение (1) - классическое уравнение линейной теории, которое применяется для описания как дозвуковых, так и сверхзвуковых течений.

$$\begin{gathered}2\varphi_{xt} + (\gamma+1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2\psi_y\varphi_{xy} + 2\psi_z\varphi_{xz} + \tfrac{\gamma-1}{2}(2\psi_t + \psi_y^2 + \psi_z^2)\varphi_{xx} - \\ -\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = -\psi_{tt} - 2\psi_y\psi_{yt} - 2\psi_z\psi_{zt} - \psi_y^2\psi_{yy} - \psi_z^2\psi_{zz} - 2\psi_y\psi_z\psi_{yz}.\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (2) - нелинейное (в т.ч. нелинейный член $\varphi_x\varphi_{xx}$), описывающее трансзвуковые течения газа (течения, содержащие как дозвуковые, так и сверхзвуковые зоны, а также звуковую поверхность- поверхность перехода скорости газа через скорость звука; в установившемся случае эта поверхность является поверхностью параболичности, разделяющей гиперболическую (сверхзвуковую) и эллиптическую (дозвуковую) области). Функция $\psi(y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\psi_{yy} + \psi_{zz} = 0$. В случае $\psi \equiv 0$ получим уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна, переходящее для установившихся течений в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича.

$$\begin{gathered}2V\varphi_{\xi t} + 2\beta a^2\varphi_{\xi y} + [(\gamma+1)VM^2\varphi_\xi + (\gamma-1)M^2\psi_t - \\ -2V\beta\psi_y]\varphi_{\xi\xi} = a^2(\psi_{yy} + \psi_{zz}) - \psi_{tt}\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\xi = x - \beta y$, $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, $M = V/a$ - число Маха, γ - показатель Пуассона, функция $\psi(y, z, t)$ - произвольная. Нелинейное уравнение (3) описывает сверхзвуковое течение в окрестности ударной волны, мало отличающейся от линий Маха $\xi = const$. Функция $\psi(y, z, t)$ задает поперечное аэродинамическое воздействие.

Представлены решения некоторых задач газовой динамики на основе уравнений (1)-(3).

D. V. Treschev (Moscow, Russia)
treschev@mi.ras.ru

THE ANTI-INTEGRABLE LIMIT

The anti-integrable limit is one of the convenient and relatively simple methods for the construction of chaotic hyperbolic invariant sets in Lagrangian, Hamiltonian, and other dynamical systems. I plan to present the most natural context of the method, examples and applications.

T. N. Harutyunyan (Yerevan, Armenia)
hartigr@yahoo.co.uk

ABOUT THE DEPENDENCE OF SPECTRAL DATA ON BOUNDARY CONDITIONS

Let $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, are the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem $L(q, \alpha, \beta)$:

$$-y'' + q(x)\, y = \mu y,\ x \in (0, \pi),\ q \in L^1_R[0, \pi],$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,\ \alpha \in (0, \pi],$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0,\ \beta \in [0, \pi).$$

The first question that we want to answer is:

How to move the eigenvalues, when (α, β) change on $(0, \pi] \times [0, \pi)$.

For this purpose we introduce the concept of the eigenvalues function (EVF).

Definition. *The function* $\mu_q(\cdot, \cdot)$, *defined on* $(0, \infty) \times (-\infty, \pi)$ *by formula*

$$\mu_q(\alpha + \pi k, \beta - \pi m) \overset{def}{=} \mu_{k+m}(q, \alpha, \beta),\ k, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

called the eigenvalues function (EVF) of the family of problems
$\{L(q, \alpha, \beta), \alpha \in (0, \pi],\ \beta \in [0, \pi)\}$.

We find that this function has many properties, which we can investigate and the answer to our first question is:

When (α, β) change on $(0, \pi] \times [0, \pi)$, then the set of the eigenvalues form an analytic surface which we called EVF, i.e. the function $\mu_q(\cdot, \cdot)$ is a real analytic function on the domain $(0, \infty) \times (-\infty, \pi)$.

We find necessary and sufficient conditions for function of two variables having these properties to be the EVF of the family of problems
$\{L(q, \alpha, \beta), \alpha \in (0, \pi],\ \beta \in [0, \pi)\}$. In particular an algorithm for solving the inverse problem is given.

Х.А. Хачатрян (Ереван, Армения)
Khach82@rambler.ru

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

Интегральные уравнения со степенной нелинейностью вида

$$f^p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t) f(t) dt, \quad x \in (-\infty; +\infty) \tag{1}$$

представляют значительный интерес в p-адической теории струны. В частности, эти уравнения описывают динамику p-адической открытой и замкнутой струны для скалярного поля тахионов. Уравнения указанных видов возникают также в космологии (см. [1]).

В настоящей работе при определенных ограничениях на число p и на ядро K доказаны глобальные теоремы существования и единственности нетривиальных непрерывных и ограниченных решений для уравнения (1). Из полученных результатов, как частный случай, получается теорема В.С. Владимирова и Я.И.Воловича о существовании пространственно-однородных решений для нечетных p (см. [2]). Эти результаты распространяются также на более общие нелинейные интегральные уравнения вида:

$$Q(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t) f(t) dt, \quad x \in (-\infty; +\infty), \tag{2}$$

где Q - определенная на всей числовой прямой $\mathbb{R} \equiv (-\infty; +\infty)$ непрерывная монотонная и нечетная функция, удовлетворяющая определенным условиям. Приведены также частные примеры функции Q, иллюстрирующие важность

полученных результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

1. *И.В.Волович.* Свойства уравнений динамики в p-адической и полевой струнных моделях. Тр. МИАН, 2004 г., 245, стр. 296-303.

2. *В.С. Владимиров, Я.И.Волович.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны. ТМФ, 2004 г., том 138, № 3, стр. 355-368.

А.Х. Хачатрян (Ереван, Армения)
Aghavard59@mail.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЯХ

Доклад носит обзорный характер и посвящен вопросам разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений, возникающих в различных областях математической физики. Параллельно с нелинейными интегральными уравнениями будут также рассмотрены соответствующие линеаризованные и линейные уравнения. Рассматриваемые задачи в основном описываются кинетическим модельным уравнением Больцмана. Основные трудности исследования и особенность этих уравнений состоят в следующем: а) операторы которые порождают уравнения, линейны; б) операторы некомпактны; в) операторы иногда не обладают свойством монотонности; в) не менее важная особенность состоит в том, что тождественно постоянная является решением уравнения (тривиальное решение). Следовательно возникает необходимость построить физическое (не тривиальное) положительное решение. В связи с важным применением этих уравнений они часто линеаризуются. Однако линеаризация может привести не только к количественному, но и качественному различию между решениями в линейном и нелинейном случаях. Качественное различие означает, что линеаризованное уравнение не может адекватно описать задачу с физической точки зрения.
В настоящем докладе проводится сравнительный анализ между решениями различных модельных нелинейных уравнений в нелинейном и линейном случаях. Приведены конкретные нелинейные модельные уравнения, линеаризация которых приводит к решению, имеющему иное асимптотическое поведение в бесконечности.

A. P. Chugainova (Moscow, Russia)
anna_ch@mi.ras.ru

SPECIAL DISCONTINUITIES IN NONLINEAR ELASTIC CONTINUUM

Solutions of problems for the system of equations describing weakly nonlinear quasi-transverse waves in an elastic weakly anisotropic medium are studied analytically and numerically. It is assumed that dissipation and dispersion are important for small-scale processes. Dispersion is taken into account by terms containing the third derivatives of the shear strains with respect to the coordinate, in contrast to the previously considered case when dispersion was determined by terms with second derivatives. In large-scale processes, dispersion and dissipation can be neglected and the system of equations is hyperbolic. The indicated small-scale processes determine the structure of discontinuities and a set of admissible discontinuities (with a steady-state structure). This set is such that the solution of a self-similar Riemann problem constructed using solutions of hyperbolic equations and admissible discontinuities is not unique. Asymptotics of non-self-similar problems for equations with dissipation and dispersion are numerically found that correspond to self-similar solutions of the Riemann problem. In the case of nonunique self-similar solutions, it is shown that the initial conditions specified as a smoothed step lead to a certain self-similar solution implemented as the asymptotics of the unsteady problem depending on the smoothing method.

В. В. Чуешев (Кемерово, Россия)
vvchueshev@ngs.ru

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ АППЕЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОРЕ

Пусть F — фиксированная компактная поверхность рода $g = 1$, с отмечанием $\{a_1, b_1\}$. Комплексно аналитическая структура на переменном торе F_μ задается комплексным параметром (модулем) μ на верхней полуплоскости. *Характером* ρ на торе F называется произвольный гомоморфизм из $\pi_1(F)$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Мультипликативной функцией* f на F_μ для ρ называется однозначная мероморфная функция $w = f(z)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $f(Tz) = \rho(T)f(z),\ z \in \mathbb{C},\ T \in \Gamma_\mu,\ F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$.

В этой работе найден аналог формулы Аппеля, в которой простые элементы (слагаемые) будут иметь полюса только в одной или в двух точках на F_μ и голоморфно зависят от μ и ρ [1]. Обозначим через $T^{(1)}_{\rho;Q}(z)$, $\Pi_{\rho;Q}(z)$ элементарные интегралы Прима второго и третьего рода для ρ с единственным полюсом в Q соответственно на F_μ [1].

Теорема 1. *Пусть f - ветвь функции для существенного характера ρ на переменном торе F_μ с логарифмическими особыми точками $Q_1, ..., Q_r$ и логарифмическими вычетами $c_1, ..., c_r$ в них, простыми полюсами $Q_{r+1}, ..., Q_l$ и вычетами $c_{r+1}, ..., c_l$ в них, и полюсами в $Q_{l+1}, ..., Q_s$ кратностей $n_{l+1}, ..., n_s, n_k \geq 2, k = l+1, ..., s$, с заданными главными частями в них соответственно. Тогда $f = \sum_{j=1}^{r} c_j \Pi_{\rho;Q_j} + \sum_{j=r+1}^{l} c_j T^{(1)}_{\rho;Q_j} + \sum_{k=l+1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{k,j}}{(j-1)!} \frac{\partial^{(j-1)} T^{(1)}_{\rho;Q_k}}{\partial Q_k^{j-1}}$, где $f = \sum_{j=1}^{n_k} [\frac{A_{k,j}}{(z-z(Q_k))^j}] + O(1)$ в окрестности Q_k, $k = l+1, ..., s$ на F_μ, и все слагаемые голоморфно зависят от μ и ρ.*

Теорема 2. *Для ветви функции f с несущественным характером ρ с попарно различными простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $c_1, ..., c_s$ в них соответственно, на переменном торе F_μ верна формула разложения $f = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{c_r}{d_s f_0(Q_r)} T_{\rho;Q_sQ_r} + C_1 \int_{Q_0}^{P} f_0 dz + C$, где $C = 0$ при $\rho \neq 1$, $d_k = \log \rho(a_1)\varphi'(Q_k), k = 1, ..., s$, на F_μ, и все слагаемые голоморфно зависят от μ и ρ.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Chueshev V. V., Krepizina T. S.* Multiplicative functions and Prym differentials on variable tori. // J. of Math. Sciences, New-York. 2014. T. 198, № 5. C. 546–563.

Н. А. Чуешева (Кемерово, Россия)
chuesheva@ngs.ru

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В работе В. К. Белошапка [1] рассматривается нелинейное уравнение третьего порядка при $u = u(x,t)$

$$u_x \cdot u_t \left(u_{xxt} \cdot \ u_t - u_{xtt} \cdot \ u_x\right) + u_{xt}\left((u_x)^2 \cdot u_{tt} - (u_t)^2 \cdot u_{xx}\right) = 0. \tag{1}$$

Задача 1. 1). Пусть в полосе $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \ \ x + t \in (0, y_0)\}$, $(e^{-y_0} + \sqrt{2}\sin\left(y_0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \ y_0 \in \left(\pi + \frac{\pi}{4}, \ \pi + \frac{\pi}{2}\right))$, задано уравнение (1). На границе полосы зададим нулевые граничные условия

$$u|_{x+t=0} = 0, \quad u_x|_{x+t=0} = 0, \quad u_t|_{x+t=0} = 0, \quad u|_{x+t=y_0} = 0. \tag{2}$$

Ненулевое решение (1), (2) $u(x,y) = e^{-(x+t)} + \sqrt{2}\sin\left((x+t) - \frac{\pi}{4}\right)$.

2). Пусть в квадрате $x \in (0,\pi), \ t \in (0,\pi)$ задано уравнение (1) с нулевыми граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=\pi} = 0. \tag{3}$$

Ненулевым решением (1), (3) будет функция $u(x,y) = \sin x \cdot \sin t$.

Задача 2. Пусть в $K = \left\{ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,1)\right\}$ задано уравнение (1) с граничными условиями

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = u(x,1) = 0. \tag{4}$$

Решением задачи (1), (4) будет функция $u(x,t) = \sin x \cdot t \cdot \ln t$. Производная решения $u_t = \sin x \cdot (\ln t + 1) -$ неограничена в области K.

Задача 3. Пусть в полуполосе $x \in (0,\pi), \ t \in (0,\infty)$ задано уравнение (1) с условиями на границе

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{\sin(nx)}{n^5}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\sin(nx)}{n^4}. \tag{4}$$

При натуральном числе n решение $u(x,y) = \frac{e^{nt}\sin(nx)}{n^5}$ задачи (1), (4) будет неустойчивым.

Замечание 1. Решениями уравнения (1) будут функции: $u(x,t) = c + \tanh\left(d + ax + bt\right)$, e^{x+y}; $\ln(x+y)$; $\sin x \cdot \ln y$; $\sin x \cdot e^y$.

Замечание 2. Можно построить графики этих решений в трехмерном пространстве.

Литература

1. *Белошапка В. К.* Семимерное семейство простых гармонических функций. // Математические заметки. 2015. Т. 98, выпуск 6. С. 803–808.

D. S. Shirokov (Moscow, Russia)
dm.shirokov@gmail.com

COVARIANTLY CONSTANT SOLUTIONS OF THE YANG-MILLS EQUATIONS

In this work we consider a class of new field equations and present general solution of these equations [1], [2]. These equations are invariant under orthogonal coordinate transformations and invariant under gauge transformations, which depend on some Lie groups. We use some new geometrical objects - Clifford field vector and an algebra of h-forms which is a generalization of the Atiyah-Kähler algebra and the algebra of differential forms. With the use of new field equations we present a class of covariantly constant solutions of the Yang-Mills equations.

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 16-31-00347 mol_a.

R E F E R E N C E S

1. *N. G. Marchuk*, On a field equation generating a new class of particular solutions to the Yang-Mills equations, Tr. Mat. Inst. Steklova, **285**, 207-220, (2014) [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2014, Vol. **285**, pp. 197-210.]

2. *N. G. Marchuk, D. S. Shirokov*, General solutions of one class of field equations, Reports on mathematical physics (2016, to appear).

Е. В. Крутенко (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)
vvanele@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

В работе рассматриваются неоднородные уравнения вида

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right] x = \\ = e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} \left(f(t,\omega) + g(t,\omega,\omega t)\right), \quad \omega >> 1,$$

с начальными условиями $\quad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1.$

Здесь $f(t,\omega) = \sum\limits_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t,\tau,\omega) = \sum\limits_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t,\tau),$

причем среднее периодической функции $g_k(t,\tau)$ нулевое.

При некоторых естественных условиях асимптотическое разложение решения ищется в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j+r}{2}} \left[\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\right) + \right. \\ \left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} \left(p_j(t) + q_j(t,\omega t)\right)\right],$$

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π - периодичны по τ с нулевым средним, а

$$r = \begin{cases} 0, & a(t) \pm \mu_1(t) \neq n, n \in Z, t \in [0,T]; \\ -1, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \\ -2, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \end{cases}$$

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$, которое при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{-n-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{-n+1}{2}}.$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых простых задач, не зависящих от параметра ω.

В. Л. Хацкевич (Воронеж, Россия)
vlkhats@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Для разных задач математической физики и математической экономики, описываемых дифференциальными уравнениями, в качестве приближенного аналитического метода удобно использовать метод степенных рядов. При этом в силу ряда обстоятельств целесообразно использовать ряды по ортогональным полиномам Лежандра P_m. В настоящей работе предлагаются некоторые новые свойства полиномов Лежандра P_m, полезные для приложений.

Теорема 1. *Имеет место, следующее разложение полинома $P_m(\xi)$ по степеням $(\xi+1)$*

$$P_m(\xi) = (-1)^m + \sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}}{2^l} \times C_l^m \Big(\sum_{i=m-l}^{m} C_{ml}^{i^{m-i}}\Big)(\xi+1)^l. \tag{1}$$

Следующее предложение дает формулу, выражающую производную полинома Лежандра через линейную комбинацию полиномов порядка не выше заданного.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$(l+\xi)\frac{dP_{n+1}(\xi)}{d\xi} = \sum_{k=0}^{n}(2k+l)P_k(\xi) + (n+l)P_{n+1}(\xi). \tag{2}$$

Аналогично при $m \leq n$ можно получить формулу для $(1+\xi)^m \frac{d^m P_{n+1}(\xi)}{d\xi^m}$. В частности, справедлива

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$(l+\xi)^2\frac{d^2P_{n+1}(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=0}^{k}(2l+1)P_l(\xi) + (k+l)P_{k+1}(\xi)\Big). \tag{3}$$

R E F E R E N C E S

1. *Khatskevich V. L.* Some properties of Legendre polynomials and an approximate solution of the Black–Scholes equation governing option pricing // Differential Equations 2015. T. 51, Vol. 9. P. 1157–1164.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00253А)

М. У. Яхшибоев (Самарканд, Узбекистан)
yahshiboev@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВА ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА АДАМАРА

В данной работе рассмотрим действие операторов дробного интеграванне Адамара в пространстве $L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)$, где $\omega\left(x\right)=\begin{cases} x^{-\gamma}, & 0<x<1,\\ x^{-\nu}, & x>1,\end{cases}$ $\gamma\geq 0,\ \nu\geq 0$, «кусочно-степенных» весовых функциях с разным поведением в начале координат и на бесконечности. Именно Ж.Адамар ввел дробные интегралы вида (см. [1], §18)

$$I_+^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi\left(t\right)\frac{dt}{t},\qquad I_-^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{dt}{t}.$$

Аналогичная модификация дробного интеграла Адамар имеет вид

$I_{+,t}^{\alpha,l}\varphi=\tilde{\Delta}_t^l I_+^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\tilde{\Delta}_{l,\alpha}^+\left(\ln\frac{x}{\tau},\ln\frac{1}{t}\right)\varphi\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\tau}$, с ядром $\tilde{\Delta}_{l,\alpha}^+\left(\xi,h\right)=\left(\tilde{\Delta}_h^l k_\alpha^+\right)\left(\xi\right)$, $\left(k_\alpha^+\right)\left(\xi\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\xi_+^{\alpha-1}$. Именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Операторы* $I_\pm^\alpha,\alpha>0$ *ограничены в пространстве* $L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)$, $1\leq p\leq\infty$, $\lambda>0$, $\nu>0$,

$$\|I_\pm^\alpha\varphi\|_{L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)}\leq C_{p,\alpha}\,\|\varphi\|_{L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)},$$

где $C_{p,\alpha}=\left(\frac{p}{m}\right)^\alpha$, $C_{\infty,\alpha}=\left(\frac{1}{m}\right)^\alpha$, $m=\min\left(\gamma,\nu\right)$ *для оператора* I_+^α *и* $C_{p,\alpha}=\left(\frac{p}{M}\right)^\alpha$, $C_{\infty,\alpha}=\left(\frac{1}{M}\right)^\alpha$, $M=\max\left(\gamma,\nu\right)$ *для оператора* I_-^α.

Теорема 2. *Оператор* $I_{+,t}^{\alpha,l},\alpha>0$ *ограничены в пространстве* $L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)$, $1\leq p\leq\infty$, $\lambda\geq 0$, $\nu\geq 0$, $l>\alpha>0$, $0<t<1$

$$\left\|I_{+,t}^{\alpha,l}\varphi\right\|_{L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)}\leq\left\|\Delta_{l,\alpha}^+\left(\xi,\ln\frac{1}{t}\right)\right\|_{L_1}\|\varphi\|_{L_p\left(R_+^1;\omega(x)\frac{dx}{x}\right)}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Марчиев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. “Наука и техника”. 1987.

Содержание

1 Анализ **1**

Авсянкин О. Г. Ограниченность и компактность интегральных операторов с однородными ядрами **1**

Арабаджян Л. Г., Хачатрян С. А. Решения интегрального уравнения Винера-Хопфа в закритическом случае **1**

Бабаян А.О., Абелян С.О. О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения шестого порядка в единичном круге **2**

Барсегян А. Г. О факторизации интегральных уравнений, ядра которых однородные функции степени (-1) **2**

Братищев А. В. Критерий устойчивости положений равновесия синергетического регулятора. Общий случай **3**

Vakulov B. G., Drobotov Yu. E. On condition for boundedness of the Riesz potential type poerator from L^p to $H^{\omega(\cdot)}$ on $\dot{\mathbb{R}}^n$ **4**

Волчков В. В., Волчков Вит. В. Устойчивость класса функций, удовлетворяющих взвешенному условию Мореры **4**

Гиль А. В., Ногин В. А. Комплексные степени одного дифференциального оператора, связанного с оператором Гельмгольца **5**

Енгибарян Н. Б. Методы операторной факторизации в теории уравнений свертки **5**

Захарян В. С., Даллакян Р. В. О принадлежности произведения $B_\alpha(-1 < \alpha \leq 0)$ некоторым функциональным классам **6**

Иванова О. А., Мелихов С. Н. О динамике оператора обобщенного сдвига влево **6**

Калитвин А. С. Иноземцев А. И. О фредгольмовости одного класса линейных уравнений с частными интегралами **6**

Karapetyan G. A. Integral representation of functions and embedding theorems for general multianisotropic spaces **7**

Karapetyants A.N., Samko S.G. On a certain new classes of Bergman-type spaces **8**

Клешкова Е. А. О гипергранях многогранника Ньютона дискриминанта системы полиномов **8**

Комлов А. В. Аналитическое продолжение алгебраических функций с помощью полиномов Эрмита-Паде 1-го рода **8**

Krivokolecko V.P. К вычислению интегралов специального вида по остову единичного полицилиндра в $\mathbb{C}^n$ **9**

Kruzhilin N. G. Milnor algebras of isolated singularities: reconstruction problem and associated forms **9**

Kryakvin V. D. Pseudodifferential equations in Hölder-Zygmund spaces of a variable smoothness **9**

Кузоватов В. И. Об аналоге формулы Плана **10**

Куликов В. Р. Критерий сходимости интеграла Меллина-Барнса для решения системы алгебраических уравнений **11**

Кудряшов Ю. Л., Третьяков Д. В. О семействах J-самосопряжённых дилатаций **12**

Лобода А. В. О голоморфно-однородных гиперповерхностях общего положения в $\mathbb{C}^3$ **12**

Лопатин И. А. Одно применение логарифмического вычета к вычислению тропических гиперповерхностей **13**

Мкртчян А. Д. Продолжение степенных рядов в секториальную область путем интерполяции коэффициентов **13**

Muzalevskaya E. M. Coamoeba of discriminant for tetranomials **14**

Мышкина Е. К. Вычетные интегралы для специальных систем неалгебраических уравнений **14**

Naprienko Y. M. The resultant for certain types of entire functions **15**

Оганисян И. В. О коэффициентах Тейлора аналитических функций класса N_α **15**

Павлов Н. А. Оценка шварциана голоморфных однолистных функций **16**

Peicheva A. S. On a non-coercive sturm-liouville problem for the Lamé system **16**

Petrosyan V., Riemann boundary value problem in weighted spaces **17**

Петросян Г. Г. О приложениях нелинейного анализа в теории дифференциальных включений дробного порядка **17**

Polkovnikov A. N. On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators **18**

Почекутов Д.Ю. Представление дискриминанта системы алгебраических уравнений через многомерные степенные суммы корней **18**

Rokhlin D. B. Asymptotic sequential Rademacher complexity of a finite function class **19**

Sumbatyan M. A, Abramov V. V. Acceleration of the convergence of green's functions series representation for a turbulent flow in the channel **19**

Smirnova I. Yu. On some weighted variable exponent mixed norm Bergman-type spaces **20**

Суковых В. И. О голоморфно-однородных гиперповерхностях, представляемых лакунарными уравнениями **20**

Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Метод вложения в теории экстремальных задач для суммируемых функций **21**

Ситник С. М. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи **21**

Ульверт Р. В. О циклах, разделяющих набор поверхностей **22**

Fedorovskiy K. Yu. Approximation problems for polyanalytic functions **22**

Fedchenko D. P. A class of toepliz operators in several variables **22**

Черепанский А. Н. Об областях сходимости двумерных гипергеометрических рядов **22**

Лейнартас Е. К., Шишкина О. А. Обобщение оператора Тодда и многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена **23**

Щуплев А. В. Степенные миноранты квазиэллиптических многочленов **23**

Яковлева Т. И. Об устойчивости многомерных разностных уравнений **24**

Лифлянд И. Asymptotic relations for the Fourier transform of a function of bounded variation **24**

Tsar'kov I. G. Solarity and ε-selection **24**

Захарян В. С., Даллакян Р. В. О принадлежности произведения $B_\alpha(-1 < \alpha \leq 0)$ некоторым функциональным классам **25**

2 Математическая физика и аналитическая механика **25**

Айзикович С. М., Берусова Е. В., Митрин Б. И. Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта жёсткого тела, скользящего по покрытию на упругой подложке **25**

Antipova I. A. Bochner–Martinelli residue currents associated with monomial mappings 26

Арефьева И. Я. Задачи типа Дирихле на однородных пространствах и дуальность 26

Baranovskii E. S. Existence and uniqueness results for 3-d flows of viscoelastic fluids of oldroyd type with slip boundary conditions 26

Batishchev V. A. Appearance of fluid rotation in the thermogravitational boundary layer near the free surfac 27

Katica R. (Stevanovic) Hedrih Advances to theory of collision of two rolling rigid bodies: Application to the study of vibro-impact dynamics: * in the systems with trigger of coupled singular points in phase portraits; * in dynamics of rolling balls in elliptic billiards 27

Ватульян А. О. Обратные задачи в механике 28

Virchenko Yu. P. Solution bifurcation in stochastic model of chemical reactions 28

Volkov B. O. Levy Laplacian and self-dual Yang-Mills equations 29

Волович И. В. Квантовая динамика для несамосопряженных гамильтонианов 29

Гущин А. К. Некасательная максимальная функция и интеграл площадей Лузина для решений эллиптического уравнения 29

Енгибарян Б. Н., Енгибарян Н. Б. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве суммируемых функций 30

Ерусалимский Я. М. 3-пути на графе-решетке 30

Zharinov V. V. On the Bäclund transform of the gauge fields 31

Карякин М. И., Пустовалова О. Г. Аналитическое описание больших деформаций изгиба нелинейно-упругой неоднородной панели 31

Konstantinou-Rizos S. G. Extensions of Yang-Baxter maps on Grassmann algebras 32

Ляхов Л. Н, Рощупкин С. А. Операторы Киприянова-Катрахова и -эллиптические граничные задачи 32

Манжиров А. В. Казаков К. Е. Уравнения с несколькими интегральными операторами и их приложения в механике и трибологии 32

Maresin I. V. Celestial geometry of Lorentzian manifolds 33

Markovsky A. N. Direct sum of polyharmonic subspaces 33

Марчук Н.Г, Обобщенные алгебры Клиффорда второго порядка для уравнений теории поля 33

Михалкин Е. Н. О монодромии решения общего алгебраического уравнения 34

Morgulis A.B., Ilin K.I. Stability spectra of the open flows of incompressible fluid 34

Моршнева И. В. Возникновение пространственного периодического режима в горизонтальном слое бинарной смеси 35

Nadolin K. A., Zhilyaev I. V. One mathematical model for studying a passive admixture transport in shallow and weakly-curved natural watercourse 35

Назаров А. К. Полная асимптотика решения системы полулинейных дифференциальных уравнений первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми 35

Николаев В. Г. О решениях задачи Шварца в трехмерном случае 36

Norkin M. V. Образование каверны при быстром торможении твердого тела в возмущенной жидкости 36

Овчинникова С. Н. Резонансные режимы в окрестности точки бифуркации коразмерности 2 (резонанс Res 5) в задаче Куэтта-Тейлора 37

Пальвелев Р. В. Рассяение вихрей в абелевых моделях Хиггса на римановых поверхностях 37

Roshal D. S. , Myasnikova A .E. Mathematical modeling of self-assembly of 2d nano-objects with spherical topology 38

Солдатов А. П. Оценки интегралов с однородно -разностными ядрами на плоскости и их приложения 38

Столяр А. М. Асимптотический анализ одного класса задач теории оболочек 38

Sukiasyan H. S. An extremal property of Delaunay triangulation and its applications in mathematical physics 39

Вельмисов П. А., Семенова Е. П., Тамарова Ю. А. Асимптотические уравнения газовой динамики и их приложения 39

Treschev D. V. The anti-integrable limit 40

Harutyunyan T. N. About the dependence of spectral data on boundary conditions 40

Khachatryan Kh.A. О нетривиальных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки 40

Khachatryan A. Kh. Сравнительный анализ между решениями некоторых модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях 41

Chugainova A. P. Special discontinuities in nonlinear elastic continuum 41

Чуешев В. В. Аналог формулы Аппеля разложения мультипликативной функции на переменном торе 41

Чуешева Н. А. Точные решения для одного нелинейного уравнения с частными производными 42

Shirokov D. S. Covariantly constant solutions of the Yang-Mills equations 42

Крутенко Е. В. Асимптотическое интегрирование линейных неоднородных уравнений второго порядка с большим параметром 42

Хацкевич В. Л. О некоторых свойствах полиномов Лежандра и их применениях в приближенных вычислениях 43

Яхшибоев М. У. Исследование некоторых свойства дробного интеграла Адамара 44

Научное издание

VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике

(г. Ростов-на-Дону, 11 – 16 сентября 2016 г.)

Материалы и доклады

Технический редактор *Кудинов Н.В.*

Корректоры: *Н.В. Кудинов, А.В. Гиль, В.В. Шамраева*

Компьютерная обработка: *Н.В. Кудинов, А.В. Гиль*